

Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconda e terza

Competizione 5 marzo 2026

Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (7 punti) Lunatico

Soluzione da redigere in francese o in inglese o in tedesco o in spagnolo con un minimo di 30 parole.

Poiché il ragazzo dice la verità in due giorni consecutivi: il giovedì e il venerdì, ma nella risposta non compare uno stesso nome in due giorni consecutivi, si deduce che i due giorni non possono che corrispondere all'inizio e alla fine della sequenza dei giorni, per cui

1) venerdì (inizio), sabato, domenica, lunedì, martedì, mercoledì (giovedì fine sequenza ma escluso perché si considerano sei giorni) con risposte Sacha, Elio, Sacha, Elio, Lucas, Elio, oppure

2) (venerdì escluso considerando i successivi sei giorni) sabato, domenica, lunedì, martedì, mercoledì, giovedì (finale) con risposte Sacha, Elio, Sacha, Elio, Lucas, Elio.

Riportando in tabella le due sequenze:

	Giorni							Deduzioni
	Venerdì (dice il vero)	Sabato	Domenica	Lunedì	Martedì (mente)	Mercoledì	Giovedì (dice il vero)	
R	Sacha	Elio	Sacha	Elio	Lucas	Elio		Risposta corretta
		Sacha	Elio	Sacha	Elio	Lucas	Elio	R di martedì e giovedì incompatibili

La seconda non è accettabile perché il ragazzo risponderebbe nello stesso modo sia il martedì, giorno in cui mente, sia il giovedì giorno in cui invece dice la verità.

Il nome del ragazzo è Sacha.

Per i correttori, in caso di utilità, si riporta anche lo schema completo qualora gli studenti non arrivino subito a una intuizione di base.

	Giorni							Deduzioni
	Lunedì	Martedì (mente)	Mercoledì	Giovedì (dice il vero)	Venerdì (dice il vero)	Sabato	Domenica	
Risposte	Sacha	Elio	Sacha	Elio	Lucas	Elio		giovedì e venerdì incompatibili
		Sacha	Elio	Sacha	Elio	Lucas	Elio	giovedì e venerdì incompatibili
	Elio		Sacha	Elio	Sacha	Elio	Lucas	giovedì e venerdì incompatibili
	Lucas	Elio		Sacha	Elio	Sacha	Elio	giovedì e venerdì incompatibili
	Elio	Lucas	Elio		Sacha	Elio	Sacha	R corretta
	Sacha	Elio	Lucas	Elio		Sacha	Elio	martedì e giovedì incompatibili
	Elio	Sacha	Elio	Lucas	Elio		Sacha	giovedì e venerdì incompatibili

Esercizio n. 2 (5 punti) Senza il nove

La somma richiesta è 106 656.

Per ottenerla si possono eseguire varie strategie:

- 1) Se s'impostano tutte le possibili situazioni

1	3	5	7
1	3	7	5
1	5	3	7
1	5	7	3
1	7	3	5
1	7	5	3

3	1	5	7
3	1	7	5
3	5	1	7
3	5	7	1
3	7	1	5
3	7	5	1

5	1	3	7
5	1	7	3
5	3	1	7
5	3	7	1
5	7	1	3
5	7	3	1

7	1	5	3
7	1	3	5
7	5	1	3
7	5	3	1
7	3	1	5
7	3	5	1

e si sommano, quindi, in colonna per potenze di 10 si ottiene

$$10^3 \times (6+30+18+42) + 10^2 \times (30+22+26+18) + 10 \times (30+22+26+18) + (30+22+26+18) =$$

$$10^3 \times 96 + 111 \times (30+22+26+18) = 96\,000 + 111 \times 96 = 106\,656.$$

- 2) Fissata una cifra del numero, ci sono 6 possibilità per completarlo.

$$\begin{aligned} 6 \cdot [10^3 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) + 10^2 \cdot 16 + 10 \cdot 16 + 16] &= 6 \cdot 16 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) \\ &= 96 \cdot 1111 \\ &= 106\,656. \end{aligned}$$

- 3) Si sommano in colonna le permutazioni secondo le potenze posizionali di 10

$$10^3 \times (6+30+18+42) + 10^2 \times (30+22+26+18) + 10 \times (30+22+26+18) + (30+22+26+18) =$$

$$10^3 \times 96 + 111 \times (30+22+26+18) = 96\,000 + 111 \times 96 = 106\,656.$$

- 4) Si utilizzano le simmetrie all'interno dell'insieme delle permutazioni su n cifre distinte. Il simmetrico di una permutazione è quella che permette di ottenere in colonna la stessa somma
Ad esempio il simmetrico di 1 357 è 7 531 perché la loro somma è 8 888.
Poiché ci sono 24 permutazioni, ci sono 12 coppie simmetriche:

1 357 e 7 531 la cui somma è 8 888
1 375 e 7 513 la cui somma è 8 888
1 537 e 7 351 la cui somma è 8 888
1 573 e 7 315 la cui somma è 8 888
.....

Quindi per ottenere la somma totale basta eseguire il prodotto $8\,888 \times 12 = 106\,656$.

- 5) Trucco insegnato nella preparazione alle Olimpiadi di Matematica:
quando si usano tutte le permutazioni di cifre diverse, la somma è: (somme delle cifre) $\times (n-1)! \times 111 \dots 1$
(con n cifre uguali a 1) dove $(n-1)!$ è il numero di volte che ogni cifra può comparire nel sistema posizionale a base 10.

In questo caso, applicando la formula si ottiene $(1+3+5+7) \times 3! \times 1111 = 16 \times 6 \times 1111 = 106\,656$.

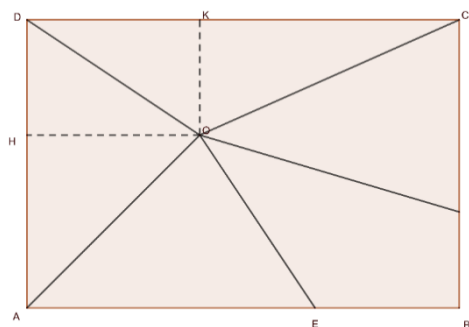
Esercizio n. 3 (7 punti) Tagliere di pizza

Ogni singola parte ha area $\frac{45 \cdot 30}{5} \text{ cm}^2 = 270 \text{ cm}^2$

Indicando con OH l'altezza del triangolo AOD relativa alla base AD e con HK quella del triangolo DOC relativa alla base CD, si determinano facilmente le loro misure:

$$OH = \frac{2 \cdot 270 \text{ cm}^2}{30 \text{ cm}} = 18 \text{ cm}$$

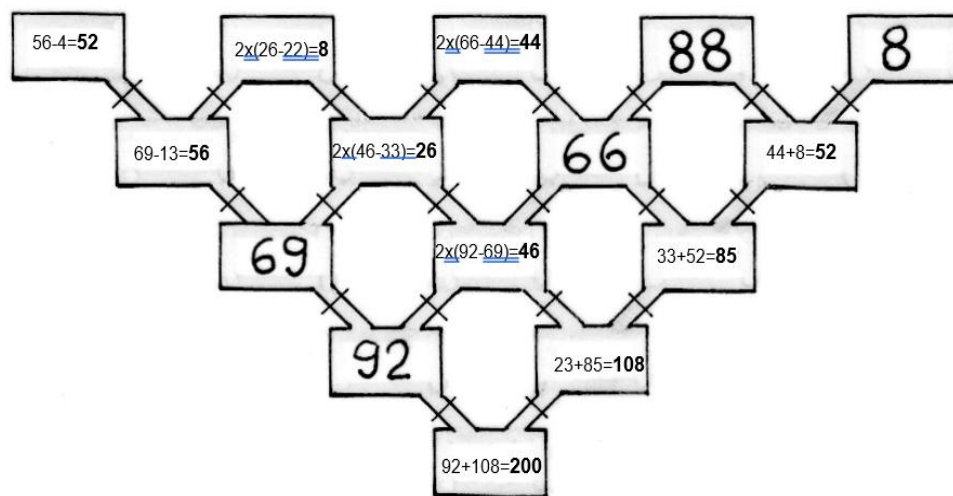
$$OK = \frac{2 \cdot 270 \text{ cm}^2}{45 \text{ cm}} = 12 \text{ cm}$$



L'altezza relativa alla base AE del triangolo AEO è congruente ad OH, ne segue che la base AE misura 30 cm

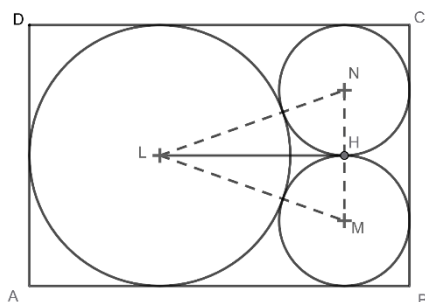
L'altezza relativa alla base CF del triangolo COF misura $(45 - 18) \text{ cm} = 27 \text{ cm}$ e quindi $CF = \frac{2 \cdot 270 \text{ cm}^2}{27 \text{ cm}} = 20 \text{ cm}$

Esercizio n. 4 (5 punti) Funziona davvero!



Può essere interessante osservare che la quantità di acqua per livello (riga) è sempre complessivamente di 200, espressa nell'u.m. inespressa nel testo.

Esercizio n. 5 (7 punti) Un pieno di tubi



Con riferimento al disegno a fianco

$$AD = 8 \text{ cm}$$

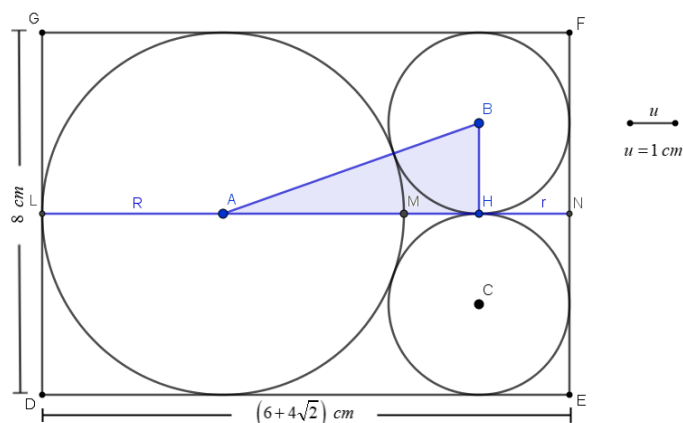
$$AB = 4 \text{ cm} + LH + 2 \text{ cm}$$

$$LH = \sqrt{LN^2 - NH^2} = \sqrt{36 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \sim 5,66 \text{ cm}$$

$$AB = 6 \text{ cm} + 4\sqrt{2} \text{ cm} \sim 11,66 \text{ cm}$$

Le dimensioni della scatola sono quindi 11,66 cm x 8 cm x 10 cm.

Oppure, più in dettaglio



$$R = 4 \text{ cm}$$

$$r = 2 \text{ cm}$$

$$\overline{AB} = R + r; \quad \overline{BH} = r$$

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}; \quad \overline{BH} = 2 \text{ cm}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2}; \quad \overline{AH} = \sqrt{36 \text{ cm}^2 - 4 \text{ cm}^2}; \quad \overline{AH} = \sqrt{32 \text{ cm}^2}$$

$$\overline{AH} = 4\sqrt{2} \text{ cm}; \quad \overline{AH} = 5,66 \text{ cm}$$

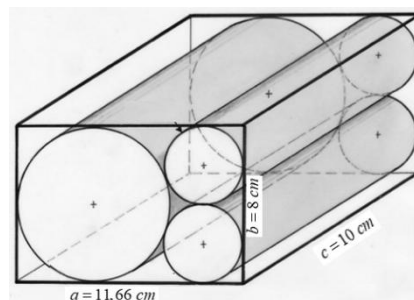
$$\overline{DE} = R + \overline{AH} + r;$$

$$\overline{DE} = (4 + 4\sqrt{2} + 2) \text{ cm}; \quad \overline{DE} = (6 + 4\sqrt{2}) \text{ cm}; \quad \overline{DE} = 11,66 \text{ cm}$$

$$\overline{EF} = 2R; \quad \overline{EF} = 8 \text{ cm}$$

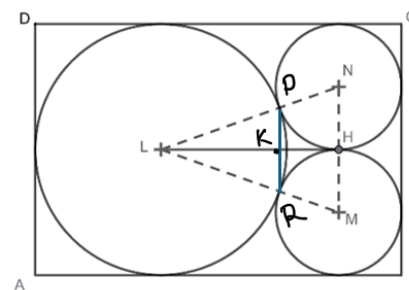
Indicate con a , b e c le dimensioni della scatola

$$a = 11,66 \text{ cm} \quad b = 8 \text{ cm} \quad c = 10 \text{ cm}$$



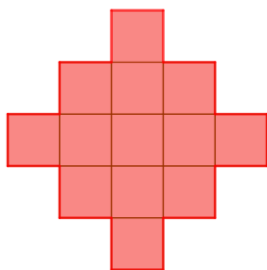
Si potrebbe, anche, ragionare a partire da una bozza di disegno, basandosi sulla simmetria della figura rispetto a LH e calcolare LH, sapendo LN = 6 cm e NH = 2 cm. Calcolare, poi, la base del rettangolo e proseguire con la definizione delle dimensioni.

Per disegnare la figura con riga e compasso si può anche supporre di considerare su una figura in bozza, i triangoli simili LNH e LPK da cui LN:NH = LP:PK e PK = 4/3 cm (circa 1,3 cm).



Esercizio n. 6 (5 punti) Cubicolor

Vista dall'alto:



Si riportano 4 ragionamenti con approcci diversi che conducono a soluzione identica: costruzione di un solido con 18 cubi rossi e 78 facce rosse. 18 cubi e 78 facce; per la pubblicazione da segnalare le illustrazioni dei procedimenti risolutivi più chiare e significative.

- 1) Al solido in figura si devono aggiungere **18 cubi rossi** (6 su ogni faccia che non ha spigoli in comune con quelle di altri cubi e 12 sulle due facce di cubi diversi che hanno uno spigolo in comune).

Per calcolare il numero delle facce si può anche, sinteticamente moltiplicare per 6 il numero di facce che si vede dall'alto: $6 \times 13 = 78$. Le facce sono, pertanto, **78**.

- 2) Un secondo ragionamento potrebbe essere quello di considerare i cinque piani che si formano nella costruzione secondo le indicazioni fornite:

1° - 5° piano) 2 cubi rossi

2° - 4° piano) 4×2 cubi rossi + (1 blu)

3° piano) 8 cubi rossi + (4 blu e 1 giallo).

Per cui i cubi finali sono 18 rossi. Poiché tutti i 18 cubi hanno 4 facce da coprire oltre ai 6 di testa con una faccia aggiuntiva, s'individuano $(18 \times 4 + 6 \times 1)$ facce = 78 facce.

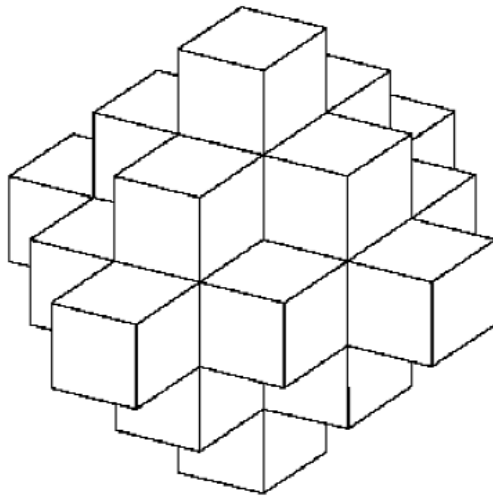
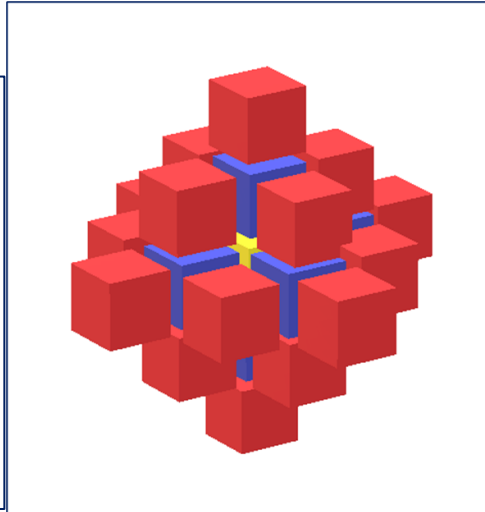
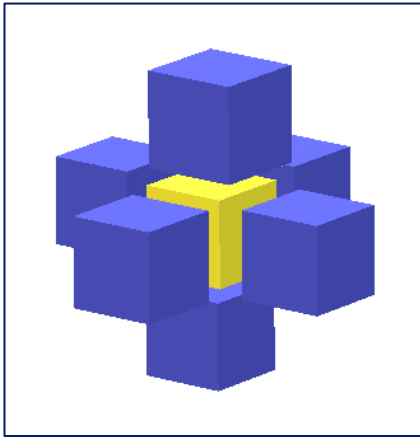
- 3) Terzo ragionamento passo passo: da un cubo giallo si passa a 6 blu sulle cui facce $6 \times (6-1)$ 30 si costruiscono i cubi rossi che però si incontrano in alcune facce per cui si hanno 6 cubi rossi (sulle facce esterne) + 12 quelli costruiti sulle facce laterali tenendo conto che tra due facce laterali blu si inserisce un solo rosso.

I 6 cubi esterni mostrano ognuno 5 facce ma la quarta è attaccata a una blu e le 4 sono parzialmente coperte per cui se ne vede una sola, in totale $6 \times 1 = 6$; i 12 cubi laterali hanno libere solo 4 facce per cui $12 \times 4 = 48$; le facce laterali delle punte sono $6 \times 4 = 24$.

Infine $(6 + 48 + 24)$ facce = 78 facce

- 4) Quarto ragionamento: 6 cubi con 3 facce da coprire portano a identificare $6 \times 3 = 18$ cubi. Di questi cubi sei non hanno visibili 5 facce, gli altri 12 solo 4 facce, per cui $(6 \times 5 + 12 \times 4)$ facce = 78 facce.

Si riportano, infine, le riproduzioni degli stadi della costruzione:



Esercizio n. 7 (7 punti) **Costume in corsa**

Dopo 30 min Patrizio ha percorso 6 km.

L'istante t in cui il padre raggiunge Patrick è dato dalla soluzione dell'equazione $60 \frac{km}{h} \cdot t = 6 km + 12 \frac{km}{h} \cdot t$ da cui

$$t = \frac{1}{8} h$$

Da notare che dopo 7,5 minuti padre e figlio si trovano a 7,5 km da casa e quindi Patrizio riuscirà ad arrivare alla piscina con il costume.

Nota: in base Normativa ISO, il risultato dovrebbe essere fornito in s (secondi), ma stante la tipologia di quesito "familiare" si accetta anche l'unità "minuti", scritta, però per esteso.

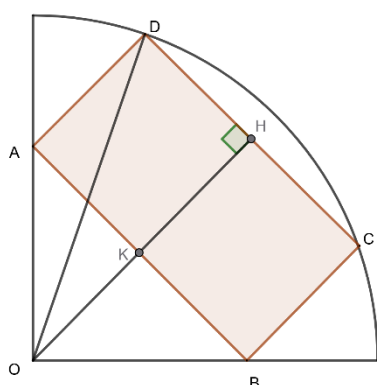
Esercizio n. 8 (5 punti) Numero autobiografico

Dal testo si deduce che:

- Le cifre possibili sono solo **0,1,2,3**
- **a≠0** essendo la prima cifra del numero misterioso. Tale numero contiene quindi almeno uno zero e una cifra non nulla oltre ad a
- **d=0** altrimenti una delle altre cifre (1 o 2) dovrebbe comparire almeno 3 volte, situazione non compatibile con quanto espresso al punto precedente

I numeri possibili sono allora 1 210 e 2 020

Esercizio n. 9 (7 punti) Delizie in mostra



Con riferimento alla figura a fianco $OK = AK = \frac{AB}{2}$ $OH = OK + KH$

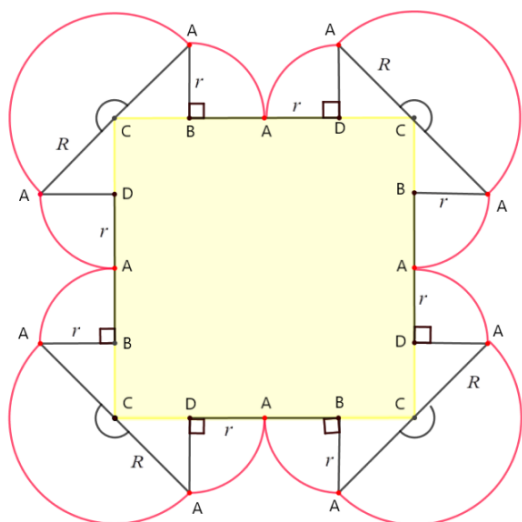
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OHD

$$OD = \sqrt{OH^2 + HD^2}$$

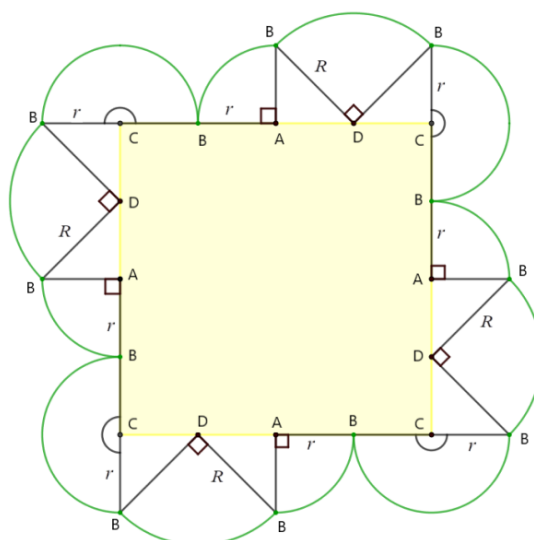
$$OD = \sqrt{\left(\frac{21}{2} \text{ cm}\right)^2 + \left(\frac{43}{2} \text{ cm}\right)^2} = \sqrt{572,50} \text{ cm} \approx 23,93 \text{ cm}$$

Esercizio n. 10 (10 punti) Il valzer del quadrato

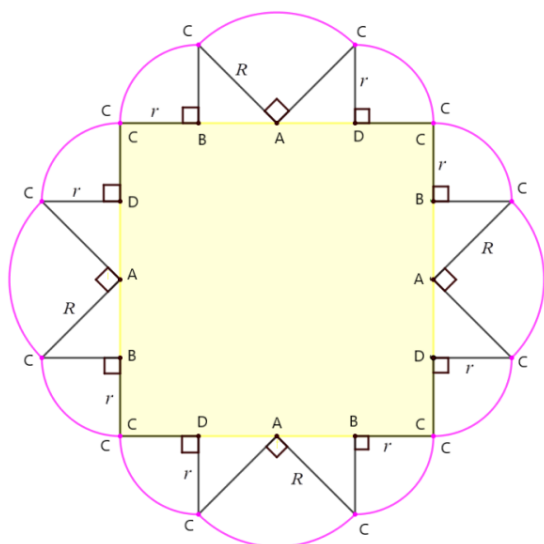
Traccia vertice A



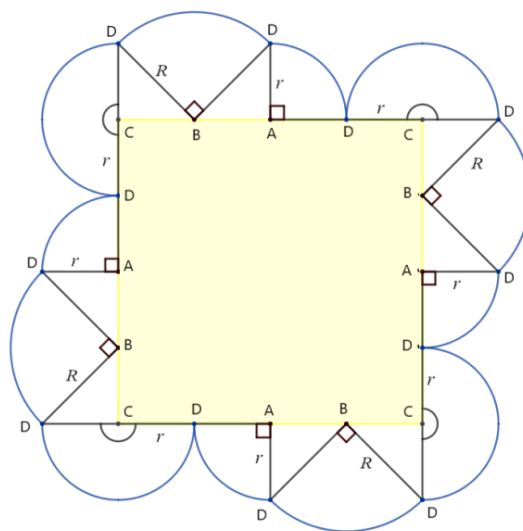
Traccia vertice B



Traccia vertice C



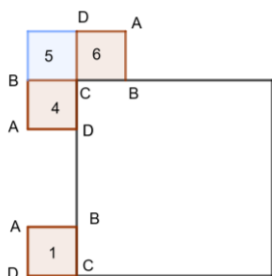
Traccia vertice D



Tutti i percorsi sono costituiti da 4 gruppi di 3 archi ciascuno, di raggio $r = 2\text{ cm}$ o $R = \sqrt{2}\text{ cm}$ e gli archi di lunghezza maggiore sono quelli derivanti dalla rotazione (di 180°) intorno ai vertici del quadrato di base. Il vertice C del quadrato piccolo è il centro di queste rotazioni e descrive quindi il percorso di lunghezza minore.

La lunghezza percorsa dal punto C è $4\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\text{ cm} + \frac{\pi}{2} \cdot 2\sqrt{2}\text{ cm} + \frac{\pi}{2} \cdot 2\text{ cm}\right) = 4\pi(2 + \sqrt{2})\text{ cm} \approx 42,9\text{ cm}$

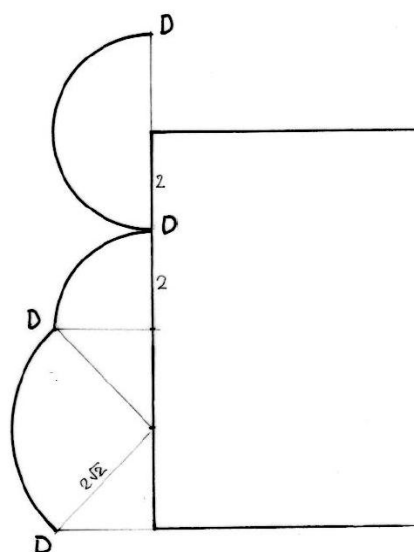
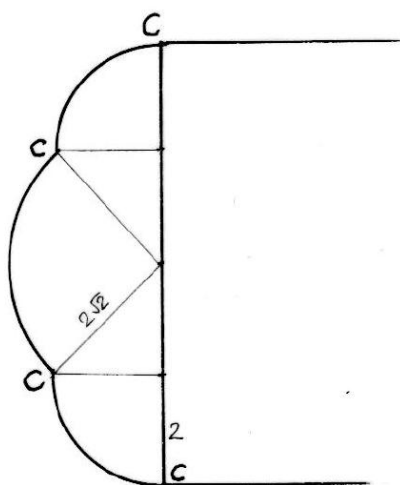
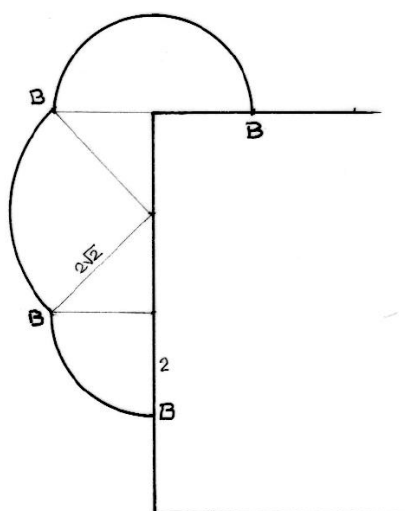
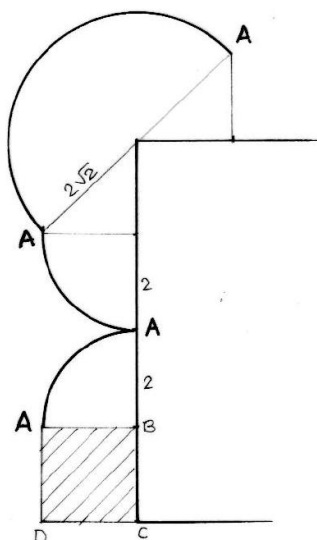
Ci potrebbe essere anche un metodo più intuitivo con approccio logico percettivo operativo, basato, cioè, sulla prefigurazione con reciproco confronto delle posizioni assumibili dai vertici in movimento dei 4 quadrati; s'inizia con l'analizzare il percorso dalla posizione 1 alla posizione 6 rappresentate qui sotto:



Nelle varie rotazioni (tutte di 90°), fino alla posizione 4, ogni punto descrive: 2 archi circonferenza di raggio 1 (se è vertice adiacente al centro di rotazione indicato nel testo), 1 arco di raggio $\sqrt{2}$ (se vertice opposto rispetto al centro di rotazione indicato nel testo).

Nel passaggio dalla posizione 4 alla posizione 6 ci sono due rotazioni di centro C e i punti A,B,D descrivono archi di circonferenze di raggio 1 o $\sqrt{2}$, di conseguenza il percorso del punto C è quello di lunghezza minore.

Oppure una riflessione grafica su un quarto di ogni percorso a confronto



Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) Chi ha ragione?

La risoluzione è facilmente accessibile con la composizione di una tabella del tipo dove si riportano le varie somme delle facce possibili

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10

da cui si evidenzia la frequenza uguale della somma 5 e 6 pari a 4, mentre il 9 ha frequenza 2.

Pertanto i due amici hanno entrambi ragione.

Approfondendo la risoluzione a un livello più formale si può ragionare nel seguente modo:

per ottenere la somma 9 ci sono solo due configurazioni possibili: (5,4) e (6,3); per ottenere la somma 5 le configurazioni sono 4: (3,2), (2,3), (4,1), (1,4), per la somma 6 sono quelle corrispondenti alle coppie (2,4), (4,2), (5,1), (3,3)

Hanno quindi ragione entrambi.

In termini probabilistici, essendo le “uscite” dei singoli dadi tra loro indipendenti, si può osservare che una data configurazione ha probabilità $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

Le probabilità delle varie somme, poiché le singole configurazioni sono tra loro incompatibili, sono rispettivamente

$$\text{somma 9: } 2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

$$\text{somma 5: } 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$

$$\text{somma 6: } 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{6}$$

Altra rappresentazione:

Tabella dei lanci (A = dado a 6 facce e B = dado a 4 facce)

A \ B	1	2	3	4
1	(1,1) s = 2	(1,2) s = 3	(1,3) s = 4	(1,4) s = 5
2	(2,1) s = 3	(2,2) s = 4	(2,3) s = 5	(2,4) s = 6
3	(3,1) s = 4	(3,2) s = 5	(3,3) s = 6	(3,4) s = 7
4	(4,1) s = 5	(4,2) s = 6	(4,3) s = 7	(4,4) s = 8
5	(5,1) s = 6	(5,2) s = 7	(5,3) s = 8	(5,4) s = 9
6	(6,1) s = 7	(6,2) s = 8	(6,3) s = 9	(6,4) s = 10

Casi possibili: 24

E_1 = “la somma dei numeri è 5”

E_2 = “la somma dei numeri è 9”

E_3 = “la somma dei numeri è 6”

$$p(E_1) = \frac{4}{24}, \quad p(E_2) = \frac{1}{6}$$

$$p(E_2) = \frac{2}{24}, \quad p(E_2) = \frac{1}{12}$$

$$p(E_3) = \frac{4}{24}, \quad p(E_3) = \frac{1}{6}$$

$$p(E_1) = 2 \cdot p(E_2)$$

$$p(E_3) = 2 \cdot p(E_2)$$

I due amici hanno, pertanto, entrambi ragione.

Esercizio n. 12 (7 punti) Kaprekar

Esempi

1) 7,5,8

$875 - 578 = 297$; $972 - 279 = 693$; $963 - 369 = 594$; $954 - 459 = 495$; $954 - 459 = 495$

2) 6,9,4

$964 - 469 = 495$; $954 - 459 = 495$; $954 - 459 = 495$; $954 - 459 = 495$; $954 - 459 = 495$

3) 2,9,8

$982 - 289 = 693$; $963 - 369 = 594$; $954 - 459 = 495$; $954 - 459 = 495$; $954 - 459 = 495$

L'ultima differenza è sempre 495 e potrebbe, quindi, essere il numero dichiarato da Kaprekar.

Si osserva, anche, che $297 = 99 \cdot 3$, $693 = 99 \cdot 7$, $594 = 99 \cdot 6$.

Gli alunni potrebbero intuire che le differenze verificano sempre entrambi i criteri di divisibilità per 11 e per 9 e quindi per 99.

Approfondimento

Si può dimostrare che, qualunque siano le tre cifre pensate, la differenza è un multiplo di 99.

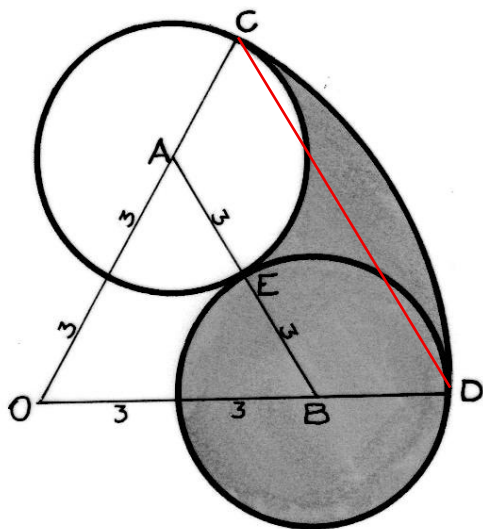
Siano x , y , z tra cifre distinte e s'indichi con x la cifra minore e con y la maggiore ($y > x + 1$)

Il massimo numero ottenibile con queste 3 cifre sarà yzx e il minimo xzy

La differenza tra questi due numeri $(10^2y + 10z + x) - (10^2x + 10z + y) = 10^2(y - x) + (x - y)$ è pari a $99(y - x)$, ovvero, è un multiplo di 99.

Esercizio n. 13 (10 punti)

Spruzzo di pioggia



area grigia = area settore ODC $-$ $1/3$ area cerchio bianco $-$ area AOB $+$ $1/6$ area cerchio grigio $+$ $1/2$ area cerchio grigio

$$\left(\frac{1}{6} \cdot 81\pi - \frac{1}{3} \cdot 9\pi - \frac{36\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6} \cdot 9\pi + \frac{1}{2} \cdot 9\pi \right) cm^2 = \left(\frac{99}{6}\pi - 9\sqrt{3} \right) cm^2$$

$$\approx 36,25 cm^2$$