Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze
Accoglienza 2025 – 2026
Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (7 punti) **Strategia vincente**

Soluzione da redigere in francese o in inglese o in spagnolo o in tedesco con un minimo di 30 parole.

La penultima manche deve essere di Théo e devono restare 4 lecca-lecca, in tal modo Isabelle sarà sicuramente l'ultima a giocare e potrà prendere tutti i rimanenti.

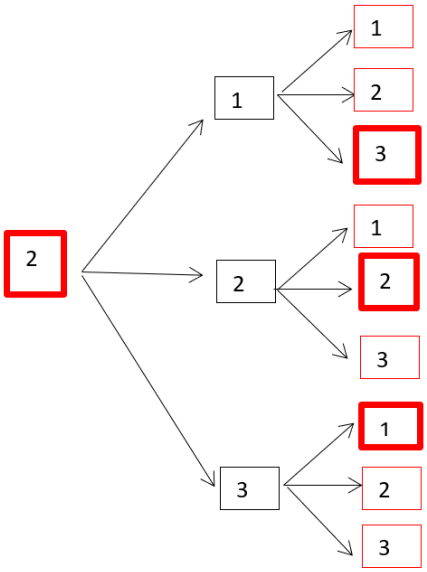
L' obiettivo di Isabelle è di lasciare il turno a Théo con un numero multiplo di quattro lecca-lecca sul tavolo: in tal caso riesce sempre a vincere perché, se Théo ne prende uno, lei ne prende tre, se Théo ne prende due, lo stesso può fare lei e se Théo ne prende tre, lei raccoglie l'ultimo lecca-lecca rimasto sul tavolo.

In sintesi Isabelle prende il numero di lecca- lecca pari al complementare a quattro della presa dell'avversario.
Il che si può rappresentare come nello schema a lato, dove inquadrata in rosso c'è scritta la presa di Isabelle.

Se al primo turno, Isabelle preleva due lecca-lecca, come si vede dall'albero, ha sempre una possibilità che le è favorevole in risposta alla scelta di Théo.

Se, invece, Isabelle prende uno o tre lecca- lecca al primo turno Théo ha sempre la possibilità di evitare che si presenti la situazione a lei favorevole.

Per vederlo basta rappresentare la situazione con un albero analogo a quello raffigurato.



Oppure si può rappresentare la soluzione evidenziando che ad Isabelle conviene pescare inizialmente 2 lecca-lecca, come si vede nella seguente tabella:

	Isabelle	Théo	Lecca-lecca residui
Primo turno	2		8
		1/2/3	7/6/5
Secondo turno	3/2/1		4

A conclusione la strategia vincente è la seguente:

- Isabella deve iniziare per prima con la presa di due lecca-lecca;
- Isabella deve sempre lasciare a Théo un numero di lecca-lecca multiplo di quattro.

Esercizio n. 2 (5 punti) Diviso in tre

Ogni poligono ha area m² $\frac{66\,m\ .\ 33\,m}{3} = 726\,m^2$

Indicata con x la misura di EF, essa è soluzione dell'equazione .

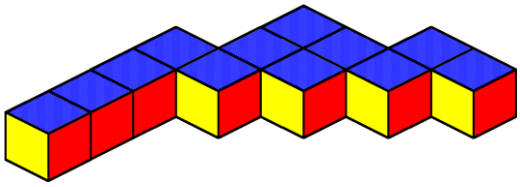
$$\frac{(33m + (x)\,m)\,33m}{2} = 726\,m^2$$

Da cui → $(x)\,m = \frac{726 \times 2 - 1089}{33}\frac{m^2}{m} = 11m$

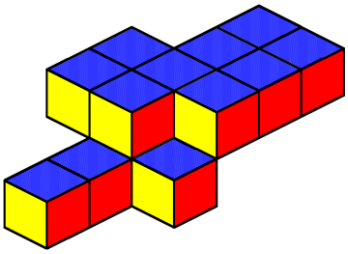
Esercizio n. 3 (7 punti) Illusioni

Si possono inserire numerose soluzioni sia a un piano sia a due. Qui se ne riportano alcune:

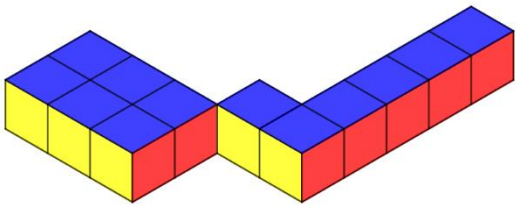
a)



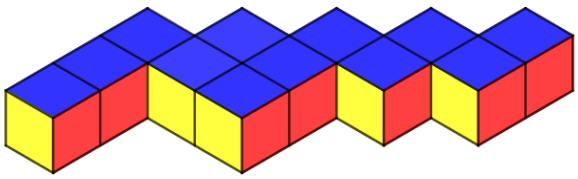
b)



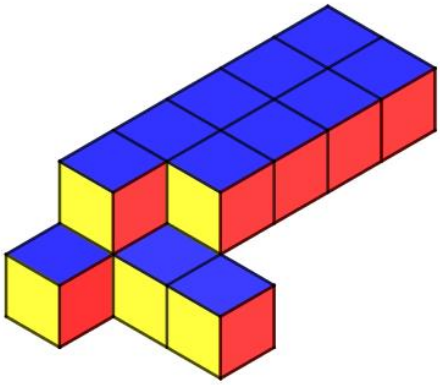
c)



d)

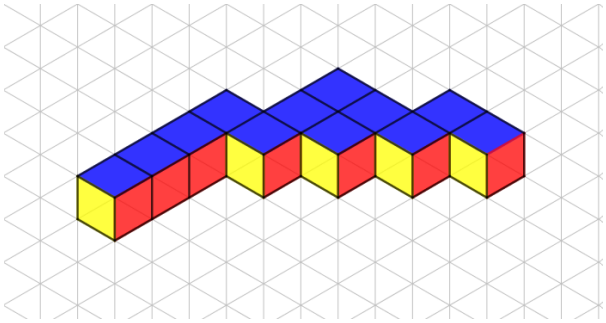


e)

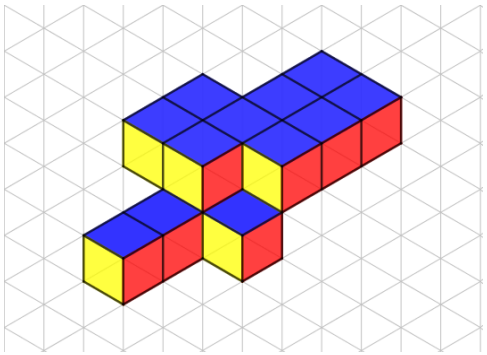


O in griglia isometrica

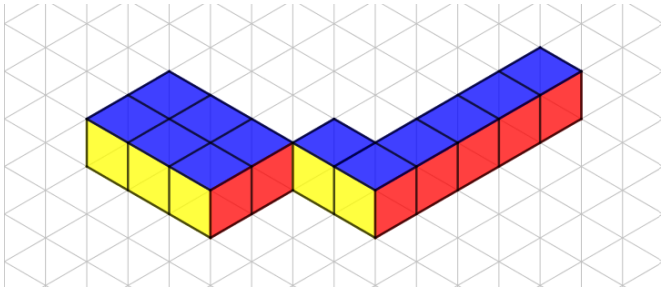
a)



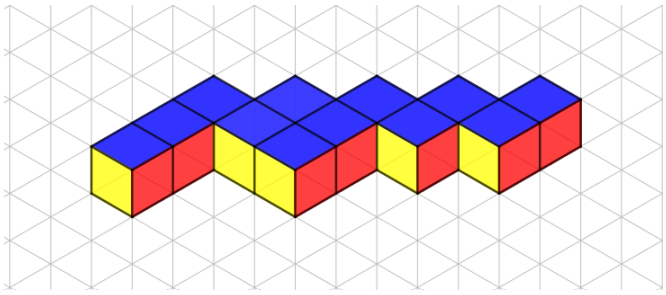
b)



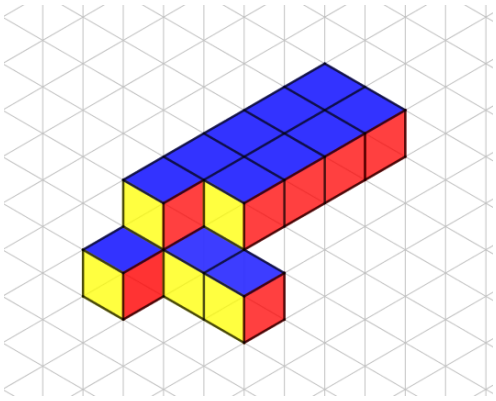
c)



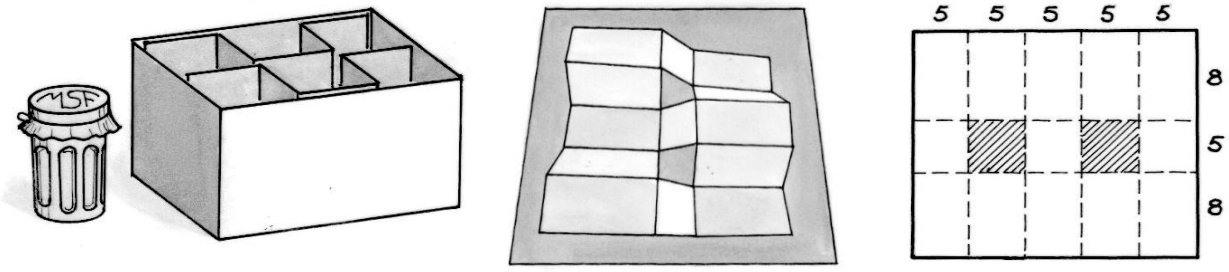
d)



e)



Esercizio n. 4 (5 punti) Dolce imballaggio



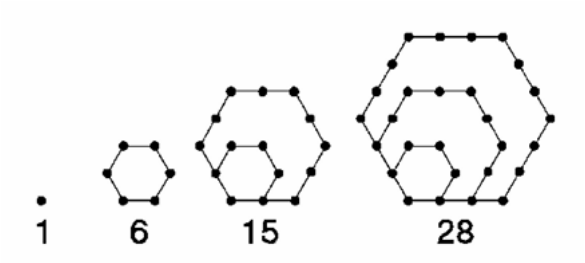
Si realizza il dispositivo di cartone interno in base alle istruzioni e si determinano così le misure delle dimensioni della scatola: misura della larghezza pari a 15 cm, della lunghezza 10 cm e dell'altezza 8 cm.

Esercizio n. 5 (7 punti) Il percorso illuminante

Nella tabella seguente è evidenziato in giallo il pulsante iniziale a cui si perviene partendo dal pulsante nero e andando a ritroso:

14=3E	6=3S	1=2E	15=3S	2=2S
22=1E	23=2E	18=2E	24=3s	19=2S
12=2S	5=2N	11=2W	4=2W	3=1W
21=2N	7=1S	17=2N	16=1W	20=4W
13=4N	8=3E	10=2N	●	9=2W

Esercizio n. 6 (5 punti) Numeri poligonali



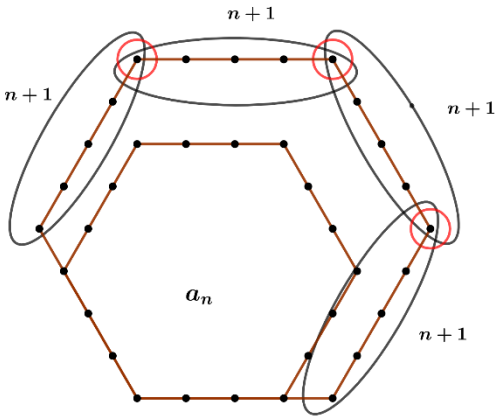
1	6	15	28
	6=1+5	15=6+9	28=15+13
1	5-1=4	9-5=4	13-9=4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5=4*2-3	9=4*3-3	13=4*4-3	17	21	25	29	33	37	41	45
1	6	15	28							231	231+45=276

La successione che descrive il numero di punti in funzione dell'n-esimo passaggio è

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 4(n+1) - 3 \end{cases}$$ da cui si ricava $a_{12} = a_{11} + 4 \cdot 12 - 3 = 276$

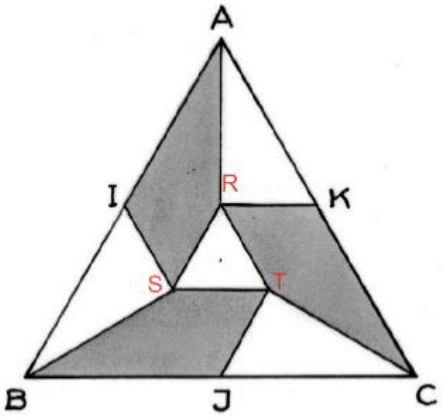
Visualizzazione geometrica



Approfondimento

D'interesse didattico, anche tenuto conto di indirizzi scolastici diversi, la possibilità d'estensione alla considerazione dei numeri triangolari, tetragonali o quadrati, esagonali, eptagonali, ottagonali..argomento che prossimamente sarà oggetto di pubblicazione sul sito nella sezione "*Per la didattica*".

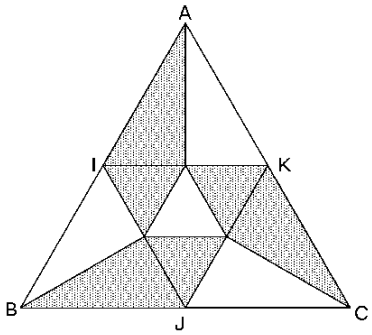
Esercizio n. 7 (7 punti) Logo



I punti I,J, K sono punti medi dei lati del triangolo ABC che è equilatero; i segmenti KI, IJ e JK sono congruenti alla metà del lato del triangolo, paralleli rispettivamente a BC, AC, AB e i punti R, S e T sono i loro punti medi. Il lato del triangolo interno è 1/4 del lato AC.

L'area di ognuno dei triangoli AIK; BJI, JCK, IJK è 1/4 dell'area di ABC.

I trapezi grigi si possono scomporre in un triangolo equilatero, di area 1/4 di quella di IJK (ovvero 1/16 dell'area di ABC) e in un triangolo rettangolo avente area metà di AIK (ovvero 1/8 di quella di ABC).



L'area della parte grigia è $3\cdot (1/16 \cdot 1 + 1/8 \cdot 1)$ dm^2, quindi, 56,25 cm^2.

Esercizio n. 8 (5 punti) **Multipli in cornice**

Occorre porre attenzione ad avere chiaro quali siano i possibili numeri da considerare:

- le due righe dei numeri scritti in alto, suddivisi, in una riga, dispari e nella seconda pari dall'1 al 9;
- la colonna a destra con i numeri 2,3,4 e 5;
- la colonna a sinistra con 4 numeri da inserire coerentemente.

Ciò detto, le affermazioni devono essere vere a compilazione effettuata.

Si tiene conto delle evidenze del quadro presente incompleto:

Multipli di	N multipli
2	6
3	4
4	3
5	2

e si procede per tentativi trovando queste due possibili soluzioni:

N multipli di 2	N multipli di 3	N multipli di 4	N multipli di 5
7 (6 già scritti + 1)	**5** (4 già scritti + 1 che sarà inserito)	**4** (3 già scritti + il 4 inserito)	**3** (2+ quello inserito)
9	**6** (4 già scritti + il 9+il 6)	**4** (Numero pari non multiplo di 3 che soddisfa le limitazioni)	**2** (Numero pari non multiplo di 3 che soddisfa le limitazioni)

I possibili quadri completati sono due:

Esercizio n. 9 (7 punti) **Carta nascosta**

Ci sono 6 permutazioni delle 3 coppie

$$25 \cdot 10^4 + 12 \cdot 10^2 + x$$

$$12 \cdot 10^4 + 25 \cdot 10^2 + x$$

$$25 \cdot 10^4 + x \cdot 10^2 + 12$$

$$12 \cdot 10^4 + x \cdot 10^2 + 25$$

$$x \cdot 10^4 + 25 \cdot 10^2 + 12$$

$$x \cdot 10^4 + 12 \cdot 10^2 + 25$$

$$(25 + x + 12)(10^4 + 10^2 + 1) = 717\ 171$$

$$25 + x + 12 = 71 \qquad x = 34$$

Oppure col ricorso alla scrittura polinomiale

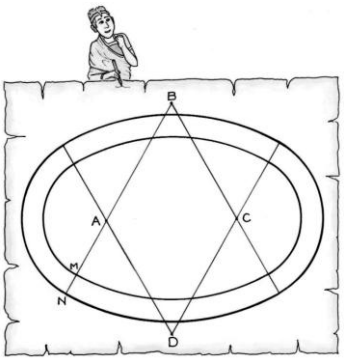
$2(12 \cdot 10^4 + 12 \cdot 10^2 + 12 +$

$x \cdot 10^4 + x \cdot 10^2 + x +$

$25 \cdot 10^4 + 25 \cdot 10^2 + 25) = 1\ 434\ 342$

da cui x = (717 171 – 370 000 - 3 700 – 37) : 10 101 → x = 34

Esercizio n. 10 (10 punti) **Arena**



1) Si consideri l'ovale interno:

Poiché i due archi con centro rispettivamente in A e in C hanno angoli al centro la cui somma è 240°, la lunghezza

$\frac{2}{3} \times 2\pi \times 3\ cm = 4\pi$ cm

Analogamente considerando che la somma degli angoli al centro degli archi con

centro in B e D è 120°, $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 9\ cm = 6\pi\ cm$

per cui la lunghezza dell'ovale interno è di $10\pi\ cm \approx 31{,}4\ cm$

2) Si consideri l'ovale esterno:

Analogamente, in base al precedente ragionamento, s'individua che la somma degli archi con centro in A e C è $\frac{2}{3} \times 2\pi \times 4\ cm = \frac{16}{3}\pi cm$

e per gli archi con centro in B e D la loro lunghezza totale è $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 10\ cm = \frac{20}{3}\pi\ cm$

per cui la lunghezza dell'ovale esterno è:

$(\frac{16}{3}\pi + \frac{20}{3}\pi)\ cm = 12\pi\ cm \approx 37{,}7\ cm$

3) A conclusione la differenza richiesta delle lunghezze esterna e interna dell'arena

$(12\pi - 10\,\pi)\ cm = 2\pi\ cm \approx$ 6,3 cm.

Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) **Le" triplette" di Galileo** (5 punti)

Si può costruire la seguente tabella

N = 9	N triplette	**N = 10**	N triplette
6+2+1	6	6+3+1	6
5+3+1	6	6+2+2	3
5+2+2	3	5+4+1	6
4+4+1	3	5+3+2	6
4+3+2	6	4+4+2	3
3+3+3	1	4+3+3	3
	25		**27**

da cui si deduce che ci sono 27 possibilità di ottenere 10 e 25 di ottenere 9.

Il numero 10 è, quindi, più " facile da ottenere" del 9.

Approfondimento

Per gusto storico si riporta, estratta dal testo menzionato, l'argomentazione stessa di Galileo:

"Che nel gioco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che dipende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, con tre numeri comporre, cioè questi con 6.6.6. e quelli con 1.1.1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v.g. il 6. o il 7., li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1.2.3.e con 2.2.2. e con 1.1.4. ed il 7. con 1.1.5., 1.2.4, 1.3.3., 2.2.3. Tuttavia ancorché il 9. e il 12. in altrettante maniere si compongano in quante il 10. e l'11. perlochè d'equal uso devriano esser reputati; si vede non di meno, che la lunga osservazione ha fatto dai giocatori stimarsi più vantaggioso il 10. e l'11. che il 9. e il 12.

E che il 9. e il 10. si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor sossopri 12. e 11.) si formino dico con pari diversità di numeri, è manifesto; imperocché il 9.si compone con 1.2.6., 1.3.5., 1.4.4., 2.2.5., 2.3.4., 3.3.3. che sono sei triplicità, ed il 10. con 1.3.6., 1.4.5., 2.2.6., 2.3.5., 2.4.4., 3.3.4. e non in altri modi, che pur son sei combinazioni. Ora io per servire a chi m'ha comandato, che io debba produr ciò, che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero, con isperanza, non solamente di scorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio compartite ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza che io possa la mio fine, comincio a considerare come essendo un dado, terminato da 6. facce, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le sue scoperte, e non più, l'una differente dall'altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei facce, potremo fare 36. scoperte tra di loro differenti, poiché ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6. scoperte diverse [per ogni faccia scoperta del primo]; onde è manifesto tali combinazioni esser sei volte 6. cioè 36. E se noi aggiugneremo il terzo dado, perché ciascuna delle sue facce, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36. scoperte degli altri due dadi, averemo le scoperte di tre dadi esser 6. volte 36. cioè 216. tutte tra di loro differenti. Ma perché i punti dei tiri di tre dadi non sono se non 16., cioè 3., 4., 5. sino a 18., tra i quali si hanno a compartire le dette 216.scoperte, è necessario, che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, averemo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tale investigazione dal 3. sino al 10. perché quello che converrà a uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

Tre particolarità si debbon notare per chiara intelligenza di quel che resta:

la *prima* è, che quel punto dei tre dadi, la cui composizione risulta da tre numeri eguali, non si può produrre, se non

da una sola scoperta, ovvero tiro di dadi, e così il 3. non si può formare se non dalle tre facce dell'asso, ed il 6., quando si dovesse comporre con tre dui, non si farebbe se non da una sola scoperta.

Seconda: il punto, dai tre numeri, due dei quali sieno i medesimi, e i terzo diverso, si può produrre da tre scoperte, come v.g. il 4. che nasce dal 2 e dalli due assi, può farsi con tre cadute diverse, cioè quando il primo dado scopra 2. e il secondo e il terzo scuoprano asso; o scuoprendo il secondo dado 2., e il primo e il terzo asso; o scuoprendo il terzo 2., ed il primo e secondo asso. E così v.g. l'8. in quanto resulta da
3.3.2. può prodursi parimenti in tre modi; cioè scuoprendo il primo dado 2.e gli altri 3. per uno, o scuoprendo il secondo dado 2. ed il primo e terzo 3. o finalmente scuoprendo
il terzo dado 2. ed il primo e secondo 3.

Terza: quel numero di punti, che si compone di tre numeri differenti, può prodursi in
6. maniere, come per esempio, l'8. mentre si compone da 1.3.4. si può fare con 6. scoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1. Il secondo3.e il terzo 4.; seconda, quando il primo dado faccia pur 1. ma il secondo 4.e il terzo 3.; terza, quando il secondo dado faccia 1. e il primo 3. e il terzo 4.; quarta, facendo il secondo pur 1. e il primo 4. e il terzo 3.; quinta, quando facendo il terzo dado 1., il primo faccia 3.e il secondo 4.; sesta, quando sopra l'1. del terzo dado, il primo farà 4. e il secondo 3.

Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità che nascono da due numeri uguali, e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere.

Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante scoperte differenti si possono formare tutti i numeri [o punti] dei tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende, in fronte della quale sono notati i punti dei tir dal 10. in giù sino al 3. E sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può resultare, accanto alle quali son posti i numeri, secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri, come per esempio:

10	(*m*)	*9*	(*m*)	*8*	(*m*)	*7*	(*m*)	*6*	(*m*)	*5*	(*m*)	*4*	(*m*)	*3*	(*m*)
631	(6)	621	(6)	611	(3)	511	(3)	411	(3)	311	(3)	211	(3)	111	(1)
622	(3)	531	(6)	521	(6)	421	(6)	321	(6)	221	(3)				
541	(6)	522	(3)	431	(6)	331	(3)	111	(1)						
532	(6)	441	(3)	422	(3)	332	(3)								
442	(3)	432	(6)	332	(3)										
433	(3)	333	(1)												
(27)		(25)		(21)		(15)		(10)		(6)		(3)		(1)	(108)

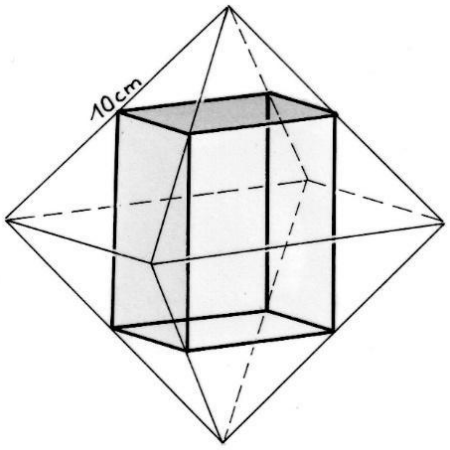
Nella prima casella abbiamo il punto 10. e sotto di esso 6. triplicità di numeri, con i quali egli si può comporre, che sono 6.3.1., 6.2.2., 5.4.1., 5.3.2., 4.4.2., 4.3.3. E perché la prima triplicità 6.3.1. è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) esser fatta da 6. scoperte di dadi differenti; però accanto ad essa triplicità
6.3.1. si nota 6. Ed essendo la seconda 6.2.2. composta di due numeri eguali, e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3. differenti scoperte, però se gli nota accanto
3. La terza triplicità 5.4.1., composta di tre numeri diversi può farsi da 6.scoperte, onde si nota con il numero 6. e così dell'altre tutte. E finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede, come il punto 10. Può farsi da 27. scoperte di dadi differenti ma il punto 9. [come il punto 12.] da 25 solamente, e l'8. da 21., il 7. da 15., il 6. da 10., il 5. da 6., il 4. da 3. e finalmente il 3.da 1., le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte dei sossopra, cioè dei punti 11. 12.13. 14. 15. 16. 17. 18. si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibile a farsi colle facce dei tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno ch'intenda il giuoco andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi per minimi che sieno delle zare, degl'incontri, e di qualunque altra particolar regola, che in esso giuoco si osserva."

Esercizio n. 12 (7 punti) **Gli amici mietitori**

Indicando con f la porzione del campo grande falciata da ciascuna persona in mezza giornata e con x il numero degli amici, si può concludere che $\begin{cases} f \cdot x + f \cdot \frac{x}{2} = 1 \\ f \cdot \frac{x}{2} + 2f = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow f \cdot x + f \cdot \frac{x}{2} = 2\left(f \cdot \frac{x}{2} + 2f\right) \rightarrow x = 8$

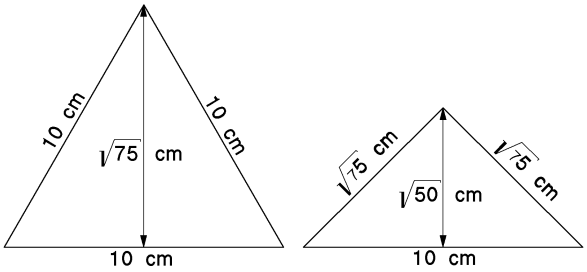
Altro procedimento a partire dalla osservazione che la porzione del campo grande falciata al pomeriggio è la metà di quella falciata al mattino, pertanto in mezza giornata gli amici falciano i 2/3 del campo grande. La porzione del campo piccolo falciata nel pomeriggio è quindi 2/3. Tito in una giornata falcia 1/3 del campo piccolo che corrisponde a 1/12 del campo grande in mezza giornata $\frac{1}{12}Sx = \frac{2}{3}S \quad x = 8$

Esercizio n. 13 (10 punti) **Pavimentazione di buone dimensioni**



Il parallelepipedo ha base quadrata, lo spigolo relativo a tale base è metà di quello dell'ottaedro per cui misura 5 cm e l'altro è l'altezza di una delle due piramidi che compongono l'ottaedro:

$$\sqrt{\left(10\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 25\ cm} = 5\sqrt{2}\ cm$$



Il volume dell'ottaedro si calcola facilmente come somma di due piramidi, mentre quello del parallelepipedo riflettendo sul fatto che:

- i suoi spigoli si trovano sui punti medi dell'ottaedro e che le sue facce orizzontali sono quadrate e misurano come lato 5 cm;
- la metà superiore del parallelepipedo ha altezza pari alla metà di $5\sqrt{2}\ cm$.

Pertanto il rapporto tra il volume del parallelepipedo e quello dell'ottaedro è pari a

$$\frac{125\sqrt{2}}{\frac{1000\sqrt{2}}{3}} = 0{,}375$$

cioè, 37,5%.