Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 5 marzo 2020

Proposta di soluzioni

Esercizio n. 1 (7 punti) **A chi tocca?**

Il tempo totale per l'occupazione dei bagni è 78 minuti e, quindi, la soluzione ideale sarebbe 39 minuti per bagno.
Questo non è realizzabile con i tempi proposti ed è necessario trovare la combinazione che più si avvicini ad essa (un bagno occupato per 41 minuti e l'altro per 37).
Tutti fanno colazione insieme ed escono alle otto in punto, Si deduce che i primi due componenti della famiglia vanno in bagno uno alle 6**:**59 e l'altro alle 7**:** 03.

Un'organizzazione possibile, conseguente a suddetto ragionamento, che risponde alla richiesta è:

:

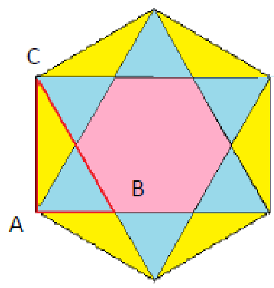
bagno 1		**bagno 2**	
Madre	21 minuti	Padre	15 minuti
Tristan	13 minuti	Justine	14 minuti
Nora	7 minuti	Samuel	8 minuti
Tempo totale **41 minuti**		Tempo totale **37 minuti**	

Esercizio n. 2 (5 punti) **Ancora un esagono**

Dall'assemblaggio richiesto si ottiene l'esagono regolare a fianco rappresentato, di lato:

$AC = 4\sqrt{3}cm \approx 6{,}93\ cm$

Si perviene alla soluzione anche considerando che il rapporto tra le aree è 3,
e, di conseguenza, il rapporto tra i lati è $\sqrt{3}$.



Esercizio n. 3 (7 punti) Il lettore del pensiero

Detto *x* il numero intero di tre cifre pensato da Tommaso, si hanno i seguenti casi:

1) $\frac{x \cdot 21 \cdot 3}{4 \cdot x} + x = 15{,}75 + x$ 2) $\frac{x \cdot 21 \cdot 4}{4 \cdot x} + x = 21 + x$

3) $\frac{x \cdot 21 \cdot 5}{4 \cdot x} + x = 26{,}25 + x$ 4) $\frac{x \cdot 21 \cdot 6}{4 \cdot x} + x = 31{,}5 + x$

Elena ascolta il risultato letto da Tommaso. Si possono avere quattro casi per ottenere il numero da lui pensato:
- se è un numero intero, sottrae mentalmente 21 (caso 2)
- se è un decimale finito che termina con 75 centesimi, sottrae 15,75 (caso 1)
- se è un decimale finito che termina con 25 centesimi, sottrae 26,25 (caso 3)
- se è un decimale finito con una sola cifra decimale, sottrae 31,5 (caso 4).

Esercizio n. 4 (5 punti) **Vantaggio garantito**

Nella prima gara Enrico arriva al traguardo quando Martino ha percorso 95 metri; ne consegue:

$v_E = \frac{100}{95} v_M$ da cui $v_E = \frac{20}{19} v_M$

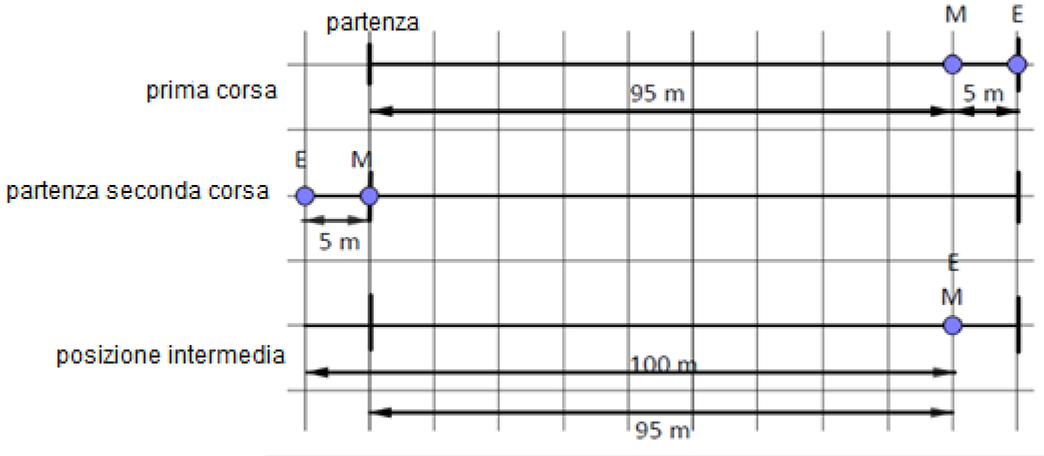
Nella seconda gara, nella quale entrambi mantengono ciascuno la stessa velocità della prima corsa, si ha:

$\frac{20}{19} v_M t_E = 105\ m$ e $v_M t_M = 100\ m$

$\Rightarrow \frac{t_E}{t_M} = \frac{105}{100} \cdot \frac{19}{20}$ quindi $t_E = \frac{399}{400} t_M$ Enrico vince!

Si può risolvere l'esercizio in modo più rapido e senza calcoli osservando che, nella seconda gara, quando Enrico ha percorso 100 metri raggiunge Martino che ha percorso 95 metri.

Enrico e Martino mantengono ciascuno la stessa velocità della prima corsa e, quindi, vincerà Enrico che si è già dimostrato più veloce.



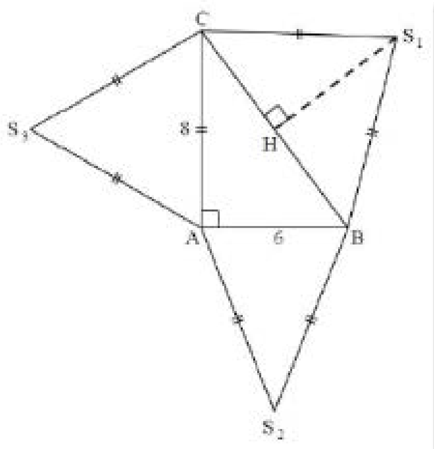
Esercizio n. 5 (7 punti) **Multipiegato**

Lo sviluppo del tetraedro è rappresentato a lato.

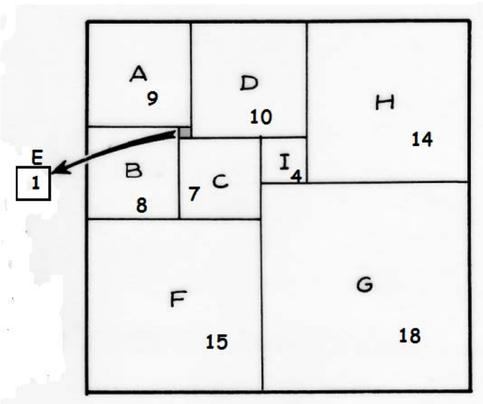
L'altezza S_1H del tetraedro cade nel punto medio H dell'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC e misura in centimetri $\sqrt{64-25} = \sqrt{39} \approx 6{,}25$.

L'area di base del tetraedro è 24 cm^2.

Il volume approssimato all'unità è 50 cm^3.



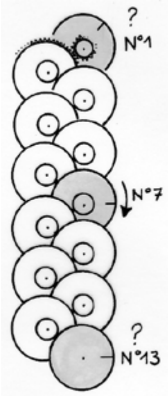
Esercizio n. 6 (5 punti) **Giardino di quadrati**



lato del quadrato A: 9 m
lato del quadrato B: 8 m
lato del quadrato E: (9-8) m = 1 m
lato del quadrato C: (8-1) m = 7 m
lato del quadrato F: (8+7) m = 15 m
lato del quadrato D: (9+1) m = 10 m
lato del quadrato I: (10+1-7) m = 4 m
lato del quadrato H: (10+4) m = 14 m
lato del quadrato G: (14+4) m = 18 m

Il giardino non è un quadrato, infatti 9+10+14 ≠ 9+8+15

Esercizio n. 7 (7 punti) E, alla fine, gira!

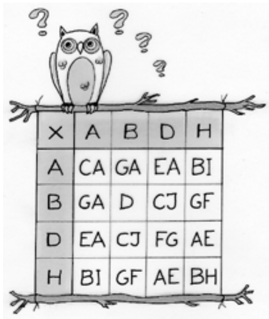


Data la composizione dell'ingranaggio tutte le ruote di numero dispari ruotano in senso orario e le altre in senso antiorario. Perciò le ruote n.1 e n.13 ruotano in senso orario.

1) La ruota n.1 aziona la n.7 per mezzo di 6 assi con fattore di moltiplicazione 7 ciascuno; pertanto la n.1 compie 7^6 giri per ogni giro della 7. Poiché la ruota n.7 compie un giro in 24 ore, la ruota n.1 compie così 117 649 giri in 24 h (pari a 86 400 secondi) con una frequenza di circa 1,36 giri al secondo.

2) Analogamente, la ruota n. 7 aziona la n.13 per mezzo di 6 assi con fattore di moltiplicazione 7 ciascuno; pertanto la n.13 compie un giro in 7^6 giorni, cioè in 117 649 giorni.
117 649 giri / 365 giorni = 322,326…..
La ruota n.13 impiega, quindi, poco più di 322 anni per completare un giro.

Esercizio n. 8 (5 punti) Decifrare le lettere



×	5	3	9	6
5	25	15	45	30
3	15	9	27	18
9	45	27	81	54
6	30	18	54	36

Leggendo la tabella si deducono, ad esempio, le relazioni:

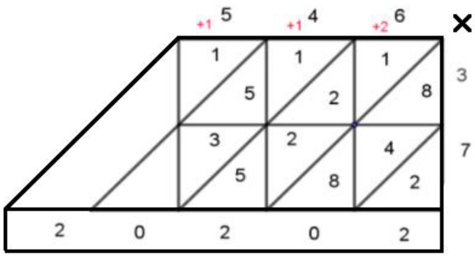
B^2= D B^4 = D^2 = FG da cui B = 3 (unica possibilità)

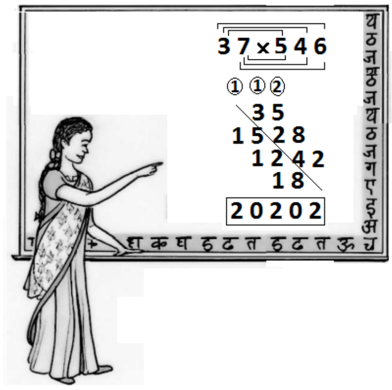
D = 9 F = 8 G = 1 …………

Da cui

A=5, B=3, C=2, D=9, E=4, F=8, G=1, H=6, I = 0, J=7

Esercizio n. 9 (7 punti) Moltiplicazioni senza frontiere





Esercizio n. 10 (10 punti) All'ora giusta

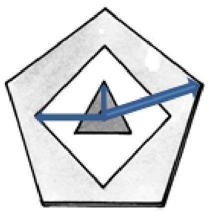
La lancetta del triangolo compie un intero giro in tre minuti, quella del quadrato in quattro e quella del pentagono in cinque.

Si deduce che la lancetta del triangolo, partendo dalla posizione iniziale, si trova nelle posizione A dopo minuti
2, 5, 8, 11. 14, 17, 20, 23, 26, **29**, 32, 35, …………

la lancetta del quadrato dopo minuti 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, **29**, 33, 37, ………..

la lancetta del quadrato dopo minuti 4, 9, 14, 19, 24, **29**, 34, 39, ………..

Le tre lancette si trovano per la prima volta nella posizione A dopo 29 minuti.



B

Dopo 51 minuti la posizione delle lancette è individuata da resto delle divisioni (il quoziente indica i giri)

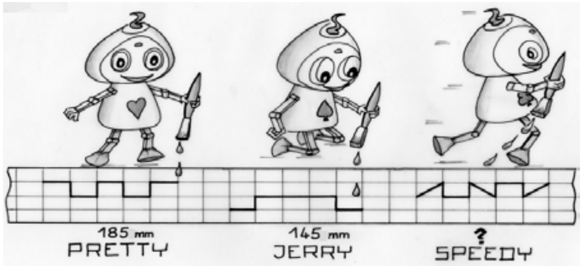
51 **:** 3 = 17 con resto 0 51 **:** 4 = 12 con resto 3 51 **:** 5 = 10 con resto 1

105 = 3 • 5 • 7

Un contaminuti a tre poligoni che si presenti di nuovo come nella posizione iniziale dopo 105 minuti deve essere composto da un triangolo, da un pentagono e da un ettagono.

Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) **Ay Caramba**



Pretty presenta 5 tratti orizzontali e 4 verticali.

Jerry presenta 5 tratti orizzontali e 2 verticali.

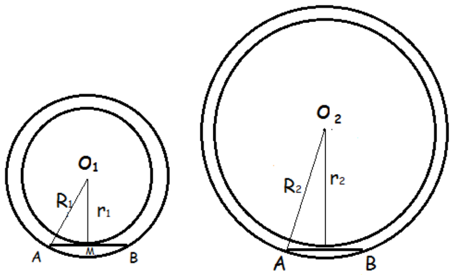
(185 -145) **:** 2 = 20 mm (lunghezza di un tratto verticale)

(145 - 40) **:** 5 = 21 mm (lunghezza di un tratto orizzontale)

Applicando il teorema di Pitagora si ottiene la misura della lunghezza del tratto obliquo pari a 29 mm e, quindi, il percorso di Speedy misura

(3x29) mm + (4x20) mm + (2x21) mm = 209 mm.

Esercizio n. 12 (7 punti) **La corona circolare**

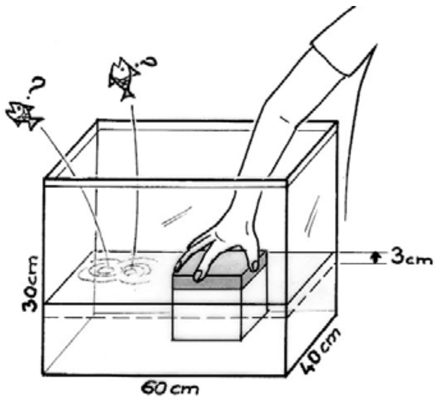


Per il teorema di Pitagora si ha: $R_1^2 - r_1^2 = 4$ $R_2^2 - r_2^2 = 4$

da cui $\pi(R_1^2 - r_1^2) = 4\pi$ $\pi(R_2^2 - r_2^2) = 4\pi$

Le due corone circolari hanno, quindi, superficie uguale**.**

Esercizio n. 13 (10 punti) **A fondo**



Poiché sono necessari 5 cubi, sarà Giovanni a depositare quello che fa debordare l'acqua.

Si può ragionare come segue: per calcolare l'altezza che raggiunge l'acqua nell'acquario dopo che è stato depositato il primo cubo si osserva che il volume della parte di cubo immersa è uguale alla quantità di acqua spostata, cioè

$60 \cdot 40 \cdot 3\ cm^3 = 7{,}2 \cdot 10^3\ cm^3$

Dividendo per la misura dell'area di base del cubo, si ottiene un'altezza di 18 cm.

E' sufficiente calcolare quanti cubi sono necessari per "riempire" il volume del contenitore:

$(60 \cdot 40 \cdot 12 - 20 \cdot 20 \cdot 2)\ cm^3 = 28 \cdot 10^3\ cm^3$

Poiché il volume di ciascun cubo è di 8 cm^3, sarà necessario depositare altri 4 cubi.

Altro ragionamento può essere il seguente:

Il Volume totale dell'acquario è $72 \cdot 10^3\ cm^3$.

Dopo aver analogamente calcolata la misura dell'altezza del cubo immersa pari a 18 cm, si deduce che l'altezza iniziale dell'acqua era di 15 cm e, conseguentemente, il volume iniziale dell'acqua misura $V_1 = 60 \cdot 40 \cdot 15\ cm^3 = 36 \cdot 10^3\ cm^3$ e la differenza di volume da riempire $V_T - V_1 = 36 \cdot 10^3\ cm^3$. Poiché il volume di ogni cubo misura $8 \cdot 10^3\ cm^3$ occorrono 5 cubi per far debordare l'acqua e, quindi, ci riuscirà Giovanni.

Nota: l'altezza iniziale dell'acqua può essere calcolata direttamente, e non per differenza, impostando l'equazione
$2\,400 \times h = (60 \times 40 - 20 \times 20) \times (h + 3)$. Risolvendola si ottiene h = 15 cm.