1

Claudio Citrini

POLITECNICO DI MILANO

Matematica senza Frontiere

Monza, 4 maggio 2018

Matematico del giorno/1 = Adriaan van Roomen
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

2

(Adrianus Romanus)
Lovanio, 29/9/1561
Magonza, 4/5/1615

1593: calcola 16 cifre decimali di π con un poligono di 2^{30} lati.

La cifra decimale numero 2.000.000.000.000.000 di pi greco è uno zero. Lo ha annunciato nel 2010 Nicholas Sze, di Yahoo!, che ha lasciato 1000 computer accesi per 23 giorni di fila.

Claudio Citrini — POLITECNICO DI MILANO

Archimede e "pi greco"

3

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Il perimetro di tutto il cerchio è triplo del diametro, ed anzi lo supera di meno di un settimo e di più di dieci settantunesimi.

Cioè $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$

Poligoni inscritti e circoscritti

Raddoppiando il numero dei lati e approssimando le radici quadrate si ottengono le disuguaglianze sopra indicate da Archimede.

Claudio Citrini — POLITECNICO DI MILANO

Esercizio n.1 Le "triplette" di Galileo

4

Se lanciamo tre dadi è più facile ottenere come somma delle facce superiori il numero 9 o il numero 10?

Soluzione

N = 9	N triplette	N = 10	N triplette
6+2+1	6	6+3+1	6
5+3+1	6	6+2+2	3
5+2+2	3	5+4+1	6
4+4+1	3	5+3+2	6
4+3+2	6	4+4+2	3
3+3+3	1	4+3+3	3
	25		**27**

Claudio Citrini — POLITECNICO DI MILANO

Esercizio n.2 Miliardario?

5

Il premio massimo di questo noto biglietto del Gratta&Vinci è di 500 000 €. La probabilità di vincere il premio massimo grattando uno di questi biglietti è dato accessibile e pari allo 0,0000166%.

Il lato lungo di ciascun biglietto misura 15,3 cm.

Supponete di allineare, uno dopo l'altro, lungo la strada dalla Villa Reale di Monza all'Hofburg, il Palazzo Reale di Vienna, con circa 850 km di percorso ottimizzato, tutti i biglietti che acquistereste per "essere teoricamente sicuri" di trovarne uno corrispondente al premio massimo.

Questi biglietti sarebbero sufficienti per coprire l'intero tragitto? Motivate la risposta riportando il vostro procedimento di risoluzione.

Claudio Citrini — POLITECNICO DI MILANO

Soluzione

6

E' sufficiente calcolare 100 : 0,0000166 per ottenere 6 000 000 (considerando l'ordine di grandezza e la prima cifra significativa di 6 024 096,38) come numero dei biglietti "cercato" che, però, come tutti i ragionamenti probabilistici, non dà certezza.

La risposta è, pertanto, positiva perché 15,3 cm x 6 000 000 = 918 km > 850 km.

App Gratta&Perdi di

Claudio Citrini — POLITECNICO DI MILANO

SecPrimGrad-Buguggiate
Gioca e …

Elaborato Grafico 1° Classificato…

(di Aneglica Ramella, Valentina Sala e Riccardo Pasciuti; 3B-Buguggiate)

2° classificato
SecPrimGrad-FagnanoOlona

- Progetto BetOnMath 2013 PoliSocialAward (5‰ PoliMI)
- Andrà – Parolini – Verani BetOnMath, Springer, 2016
- Premio Guido Castelnuovo 2017 (UMI, 1° edizione)
- BetOnMath For Citizens (MOOC)
- Dossier su Nuova Secondaria (in uscita)

Esercizio n.3 La slot machine

Considerate, ora, una slot machine composta da tre rulli con 9 simboli diversi di cui la campana è quello vincente e, nell'ipotesi che le figure possano uscire solamente intere, ***calcolate per ciascuno dei seguenti tre casi:***

la probabilità che il simbolo della campana compaia su tutti e tre i rulli contemporaneamente come in figura

la probabilità che il simbolo della campana non compaia

la probabilità che il simbolo della campana compaia su un solo rullo

Soluzione

Se si indica con C il simbolo della campana e con A un simbolo non vincente, tenendo conto delle rispettive probabilità, la soluzione può essere ottenuta ricorrendo al procedimento ad albero o calcolando la probabilità composta nei casi *a* e *b,* direttamente calcolando la probabilità totale, somma di probabilità composte, nel caso c**:**

CCC

$$\text{con } P_{ta} = \frac{1}{9}\,\frac{1}{9}\;\frac{1}{9} = \frac{1}{729} \approx 0{,}14\%$$

AAA

$$\text{con } P_{b} = \frac{8}{9}\,\frac{8}{9}\;\frac{8}{9} = \frac{512}{729} \approx 70{,}23\%$$

CAA, ACA, AAC

$$\text{con } P_{tc} = \frac{1}{9}\,\frac{8}{9}\;\frac{8}{9} + \frac{8}{9}\,\frac{1}{9}\,\frac{8}{9} + \frac{8}{9}\,\frac{8}{9}\,\frac{1}{9} = \frac{64}{243} \approx 26{,}34\%$$

La App OpenSlot

I primi 20 – 200 €

2000 € … e oltre

Sant'Agostino – Ottantatrè Questioni Diverse
45. - CONTRO GLI ASTROLOGI

2. ... contro coloro che oggi si chiamano matematici, che pretendono di sottomettere le nostre azioni ai corpi celesti, di venderci alle stelle …

Il movimento del cielo percorre quindici [parti] in una sola ora, sicché lo spazio di tempo in cui si originano quindici gradi equivale a un'ora. Ogni grado consta di sessanta minuti. Non trovano però i secondi … [Minutas autem minutarum iam in constellationibus … non inveniunt]

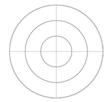
Il concepimento dei gemelli, che si attua con una sola unione, come attestano i medici, la cui scienza è molto più sicura ed evidente, avviene in un tempo così rapido da non oltrepassare due secondi.

Si dice che hanno predetto molte cose vere, ma questo dipende dal fatto che gli uomini dimenticano le loro falsità ed errori.

Unicamente preoccupati di quanto si accordava alle loro aspettative, dimenticano ciò che non corrispondeva e ricordano solo gli avvenimenti che capitano accidentalmente, non per arte divinatoria, del tutto inesistente, ma per qualche fortuita coincidenza.

Esercizio n.4 Che mira!

Alessia e Gabriele trovano in soffitta un vecchio bersaglio e delle freccette. Il bersaglio è formato da tre cerchi concentrici, rispettivamente di raggio R, 2R e 3R. Ogni cerchio è diviso in quattro spicchi uguali. Risulta, quindi, che il bersaglio è diviso in 12 zone, come mostrato in figura.



Sia Alessia sia Gabriele hanno una buona mira e riescono sempre a colpire il bersaglio. Alessia afferma che la probabilità di colpire ciascuna delle dodici zone è sempre la stessa; Gabriele, invece, sostiene che è più probabile colpire le zone esterne, mentre è meno probabile colpire le zone interne.

Chi dei due ha ragione?

Soluzione

Ha ragione Gabriele. La probabilità di ciascuna zona può essere calcolata come il rapporto tra l'area di ciascuna zona e l'area totale del bersaglio. L'area del bersaglio è:

$$A = \pi(3R)^2 = 9\pi R^2$$

L'area delle zone più interne è data da $A_1 = \frac{1}{4}\pi R^2$, quindi la probabilità sarà $A_1/A=1/36$.

L'area delle zone intermedie è data da $A_2 = \frac{1}{4}[\pi(2R)^2 - \pi R^2] = \frac{3}{4}\pi R^2$, quindi la probabilità sarà $A_2/A=1/12$.

L'area delle zone più esterne è data da $A_3 = \frac{1}{4}[\pi(3R)^2 - \pi(2R)^2] = \frac{5}{4}\pi R^2$, quindi la probabilità sarà $A_3/A=5/36$.

Che mira!
(segue)

I due amici decidono di colorare il bersaglio con tre colori (bianco, rosso e verde), usando i seguenti criteri:

con ciascun colore vengono colorate esattamente quattro zone;

la probabilità che, lanciando una freccetta, questa colpisca una zona bianca è uguale a 1/2;

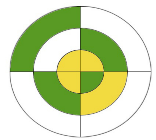
la probabilità che, lanciando una freccetta, questa colpisca una zona rossa è uguale a 1/6;

la probabilità che, lanciando una freccetta, questa colpisca una zona verde è uguale a 1/3.

Colorate il bersaglio rispettando i vincoli che Alessia e Gabriele si sono dati.

Soluzione

Usando come unità $A_1 = \frac{1}{4}\pi R^2$, l'area totale è divisa in (1 + 3 + 5) * 4 = 36 unità.



Ne vanno colorate
36/2 = 18 in bianco
36/3 = 12 in verde
36/6 = 6 in giallo
Necessariamente dunque si dovranno colorare
3 parti esterne + 1 media in bianco
3 parti interne + 1 media in giallo
e quindi restano da colorare
1 esterna, 1 interna, due medie in verde.
(ci dovrebbero essere 192 permutazioni possibili)

Tagliare la corda

Qual è la probabilità che tagliando in tre pezzi una corda si possa costruire un triangolo?

Se a, b, c sono tre segmenti e $2s = a + b + c$, il triangolo è costruibile se ogni lato è minore del semiperimetro s.

Infatti $a < b + c \Rightarrow 2a < a + b + c = 2s$ ecc.

Ora se la corda è il segmento $[-s, s]$, e x, y sono i due tagli, con $-s < x < y < s$,

è $a = x + s$, $b = y - x$, $c = s - y$.

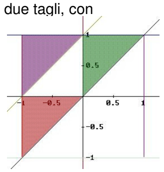
Quindi il triangolo è costruibile se

$x + s < s \Rightarrow x < 0$ (no verde)

$y - x < s \Rightarrow y < x + s$ (no viola)

$s - y < s \Rightarrow y > 0$ (no rosa)

$\Rightarrow$ (bianca) p = 1/4.



Attenzione alle ambiguità!

Qual è la probabilità che tracciando una corda a caso in un cerchio, risulti più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto?

1) Se si prendono le corde perpendicolari a un diametro, P = 1/2
(La distanza dal centro deve essere < R/2)

2) Se si prendono le corde uscenti da un punto della circonferenza, con angolo casuale, P = 1/3
(L'angolo alla circonferenza deve essere > π /3)

3) Se si prende a caso il punto medio della corda, P = ¼
(La distanza dal centro deve essere < R/2, e il cerchio di raggio R/2 ha area = ¼ del cerchio di raggio R)

Esercizio n.5 Tombola!

Paola sta giocando a tombola ed è felice perché nella sua cartella manca solo un numero, precisamente il 13 che è convinta le porterà fortuna. Devono essere estratti ancora 20 numeri.

Qual è la probabilità che faccia tombola

a) con la prossima estrazione?

b) entro la terza estrazione? Motivate la risposta.

Soluzione

$$P_a = \frac{1}{20} = 5\%$$

$$P_b = \frac{1}{20} + \frac{19}{20}\frac{1}{19} + \frac{18}{20}\frac{1}{18} = \frac{3}{20} = 15\%$$

Matematico del giorno /2 Isaac Barrow

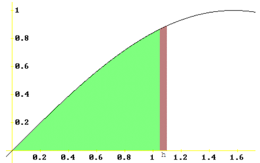
Londra, ?/10/1630 – 4/5/1677

Nel 1662 insegnò Greco e Geometria!

1663-69: cattedra Lucasiana a Cambridge (suo allievo: Newton)

Teorema di Torricelli-Barrow = teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema fondamentale del calcolo integrale (Torricelli – Barrow)



$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$I(x+h) - I(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

$$\frac{I(x+h)-I(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \xrightarrow[h\to 0]{} f(x) \qquad I'(x) = f(x)$$

Probabilità condizionata (o subordinata)

Evento E subordinato all'evento H : E | H

P(E|H) = $\frac{P(E \cap H)}{P(H)}$, o meglio $P(E \cap H) = P(E \mid H)P(H)$

$P(E \cap H) = P(E \mid H)\, P(H) = P(H \mid E)\, P(E)$

Thomas Bayes, 1763:

$$\frac{P(E|H)}{P(E)} = \frac{P(H|E)}{P(H)}$$

Se questi rapporti sono > 1, i due eventi sono positivamente correlati (negativamente se < 1)

Se i rapporti sono = 1 i due eventi si dicono stocasticamente indipendenti

Un problema classico (Chevalier de Méré – Pascal)

Q. E' più probabile ottenere almeno un 6 su 4 lanci di un dado o almeno un doppio 6 su 24 lanci di due dadi?

R. Sia A = {almeno un 6 su 4 lanci di un dado}.

E' $\overline{A}$ = {neanche un 6 su 4 lanci}, e poiché i quattro lanci si presumono indipendenti, e l'evento A_1 = {non 6 in un lancio} ha probabilità

$p_1 = 5/6$, si ha P[$\overline{A}$] = $(5/6)^4$ = 0,482253 e quindi P[A] = 0,517747.

Invece per B = {almeno un doppio 6 su 24 lanci di due dadi} risulta analogamente

P[B] = 1 – P[$\overline{B}$] = 1 - $(35/36)^{24}$ = 1 – 0,508596 = 0,491404.

Monty Hall problem

Tre scatole: un premio e due caramelle.

Ne scelgo una. Il presentatore, che sa dov'è il premio, ne apre un'altra con la caramella e mi chiede se voglio cambiare la scelta.

Mi conviene o no?

Risposta: conviene cambiare.

La probabilità di vincere era 1/3, di perdere 2/3.

Se non cambio, tali probabilità restano,

se cambio, quella di vincere diventa 2/3

(non mi conviene cambiare se avevo scelto il premio, mi conviene se avevo una delle due caramelle)

Formula delle probabilità totali

P[A] = P[A | H_1] × P[H_1] + … + P[A | H_n] × P[H_n]

In particolare se n =2, H_1 = B, H_2 = $\overline{B}$,

P[A] = P[A | B] × P[B] + P[A | $\overline{B}$] × P[$\overline{B}$].

Esempio (Capoufficio)

Q. Tre giorni su cinque, il capoufficio ha la luna di traverso. Se è in buona, rimbrotta la segretaria una volta su sei, se non lo è, due volte su tre. Qual è la probabilità che la segretaria si prenda una lavata di capo?

R. Siano B = {il capo è tranquillo}, A = {il capo rimbrotta la segretaria}. Allora P[B] = 2/5, P[$\overline{B}$] = 3/5, P[A | B] = 1/6, P[A | $\overline{B}$] = 2/3. Ne segue

P[A] = P[A | B] × P[B] + P[A | $\overline{B}$] × P[$\overline{B}$] = 1/6 × 2/5 + 2/3 × 3/5 = 7/15.

Esempio (Lotto)

Q. Qual è la probabilità che il 48 sia secondo estratto su una determinata ruota?

R. È sempre 1/90. Infatti P[2° = 48] = P[2° = 48 | 1° ≠ 48] × P[1° ≠ 48] + P[2° = 48 | 1° = 48] × P[1° = 48] = 1/89 × 89/90 + 0 × 1/90 = 1/90

Esempio (Esculapio /1)

Alice, Brenda e Carlotta sono tre infermiere che si alternano nell'ambulatorio della clinica Esculapio.

La prima fa il 50% delle iniezioni, perché è brava (solo il 10% dei pazienti sente dolore). La seconda ne fa il 30% (con 20% di sofferenti) e la terza solo il 20% (ma il 40% si lamenta).

Qual è la probabilità di subire uno spunzecchiamento doloroso?

Hi	P[Hi]	P[D | Hi]	
A = Alice	0,5	0,1	0,05
B = Brenda	0,3	0,2	0,06
C = Carlotta	0,2	0,4	0,08
		P[D]	0,19

Esempio (Esculapio /2)

Q. Nell'ambulatorio della Esculapio si sente un urlo di dolore. Chi è stata a praticare l'iniezione?

R. Le ipotesi sono A, B, C; l'evento verificato è D. Con i dati dell'esempio precedente abbiamo:

$P[A \mid D] = P[D \mid A]\, P[A] / P[D] = 0{,}1 \times 0{,}5 / 0{,}19 = 0{,}263$

$P[B \mid D] = P[D \mid B]\, P[B] / P[D] = 0{,}2 \times 0{,}3 / 0{,}19 = 0{,}316$

$P[C \mid D] = P[D \mid C]\, P[C] / P[D] = 0{,}4 \times 0{,}2 / 0{,}19 = 0{,}421$

e ovviamente la somma fa ancora 1.

L'indiziata n° 1 è Carlotta

Esempio (compleanni)

Q. Qual è la probabilità che in un gruppo di N persone ve ne siano almeno due con lo stesso compleanno? Generalizzare.

R. Si supponga che l'anno sia di 365 giorni e che le date di nascita siano eventi indipendenti ed equiprobabili ($p = 1/365$).

Sia $A_{n,k}$ l'evento {prese n persone, k di esse hanno una data di nascita già trovata}.

In particolare, $A_{n,0}$ = {prese n persone, nessuna ha lo stesso compleanno di un'altra}.

Il suo complementare è l'evento B_n = {prese n persone, almeno due hanno lo stesso compleanno} che ci interessa.

$P[A_{n+1,0}] = P[ND\notin \mid A_{n,0}] \times P[A_{n,0}] = (365-n)/365 \times P[A_{n,0}]$

Schema di calcolo

n k	0		1		2		3
1	$P[A_{1,0}]=1$		$P[A_{1,1}]=0$		$P[A_{1,2}]=0$		$P[A_{1,3}]=0$
	364/365↓	1/365↘					
2	$P[A_{2,0}] \times$		$P[A_{2,1}] \times$		$P[A_{2,2}]=0$		$P[A_{2,3}]=0$
	363/365↓	2/365↘	364/365↓	1/365↘			
3	$P[A_{3,0}] \times$		$P[A_{3,1}] \times$		$P[A_{3,2}] \times$		$P[A_{3,3}]=0$
	362/365↓	3/365↘	363/365	2/365↘	× 364/365	1/365↘	
4	$P[A_{4,0}] \times$		$P[A_{4,1}] \times$		$P[A_{4,2}] \times$		$P[A_{4,3}]$
	361/365↓	4/365↘	362/365↓	3/365↘	363/365↓	2/365↘	364/365↓
5	$P[A_{5,0}]$		$P[A_{5,1}]$		$P[A_{5,2}]$		$P[A_{5,3}]$