

Lorenzo Mascheroni
a cura di Claudio Citrini¹

Lorenzo Mascheroni nacque a Bergamo il 13 maggio 1750, in una villa in località Castagneto ancora oggi esistente e adibita a ristorante di pregio.

Frequentò il seminario della città, e fu ordinato sacerdote a soli 17 anni; nello stesso seminario insegnò dapprima retorica, quindi fisica e matematica.

La sua opera *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte* del 1785 gli fece ottenere nel 1786 la cattedra di Algebra e Geometria presso l'Università di Pavia; di quella prestigiosa sede fu poi anche Rettore nel 1789 e nel 1793. Ma egli era già attivo a Pavia da tempo, perché un errore di stampa sull'orario delle lezioni fu l'occasione per la composizione del seguente sonetto:

**Essendo stato stampato BRIXIENSIS invece di BERGOMAS sull'Orario 1778,
per l'Università di Pavia**

Son Bergamasco, e non me ne vergogno;
E chi Bresciano m'ha chiamato ha torto:
E in pubblico il dirò, se c'è bisogno,
Se c'è qualcun che non se n'era accorto.
Cangiar patria con Londra io non agogno;
Più d'un million fa Bergamo a dir corto:
Bergamo cara, di te parlo e sogno;
Te nel cor sempre, e sulla fronte porto.
Bergamaschi ci son pel mondo intero;
E più degli altri è un Bergamasco nato,
Chi ride e chi sostien che non è vero.
Un antico geografo diceva,
Che da due bergamaschi ognuno è nato:
Credo volesse dir d'Adamo, e d'Eva.

Come si vede, a parte l'affetto per la sua città non ci sono particolari valori poetici in questo componimento, e a dire il vero neppure nei molti altri che scrisse.

Il più famoso di questi è l'**Invito di Dafni Orobiano a Lesbia Cidonia**, nel quale Mascheroni (nome arcadico appunto Dafni Orobiano = bergamasco) si rivolge alla nobildonna bergamasca **Paolina Secco Suardi Grismondi**, invitandola a visitare le collezioni naturalistiche dell'università di Pavia. La descrizione degli strumenti, dei fossili e degli altri reperti è abbastanza vivace, e la spiegazione delle teorie scientifiche dell'epoca è storicamente interessante.

Una miglior vena poetica aveva probabilmente Lesbia Cidonia, come testimonia questo sonetto, di maniera ma garbato e non privo di fascino:

O rondinella

O rondinella che con rauco strido
Sembri farti compagna al mio lamento
Mentre ti aggiri intorno al caro nido
L'antico ripetendo aspro tormento,

¹ Politecnico di Milano

Quanto t'invio! io teco e piango e grido,
 Ma non ho al par di te l'ali onde al vento
 Franca ti affidi, e d'uno in altro lido
 Puoi libera varcare a tuo talento.
 Se i vanni avessi anch'io n'andrei felice
 Quel dolce a riveder beato suolo
 Dove partendo ho abbandonato il core;
 E là vorrei... ma lassa a me non lice
 Per l'ampie vie del ciel seguirti, e solo
 Fatta simile a te son nel dolore.

Tra le opere poetiche di Lorenzo Mascheroni è interessante l'ode **Gli attributi di Dio adombrati nelle proprietà del cerchio**, nella quale egli cerca di unire le sue due personalità di sacerdote e di scienziato. Come si vede dai versi qui riportati, dopo un lungo preambolo in cui racconta che il cerchio è stato simbolo divino per molti popoli, a cominciare dagli egizi, Mascheroni non solo cerca di adombrare la perfezione divina paragonandola a quella del cerchio, ma pretende di vedere un vestigio della Trinità nel fatto che in una sfera ci sono esattamente tre cerchi massimi ortogonali.

Or come quella linea, che al centro,
 Per infiniti raggi equidistante,
 S'aggira intorno ed in se stessa riede,
 Esprimer possa Dio, ridir fa d'uopo.
 Sol da sè nasce il Circolo; nè prima
 Altra figura, o di figura parte,
 Convien delinear, perch'ei si formi.

....

In una Sfera che dal cerchio nasce,
 Ed è del cerchio l'ultimo prodotto,
 Il più perfetto, non potrassi mai
 Più di tre cerchi massimi trovare,
 I di cui piani fra lor tutti stieno
 Posti ad angoli retti. E se sol due
 Tu ne formassi, non saria perfetta
 La trina dimension che la circonda.

Ma certamente maggior fama viene a Mascheroni dalla sua produzione scientifica. Oltre alla già citata **Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte (1785)** e ai **Problemi per gli Agrimensori**, trattatello o meglio formulario-eserciziario del 1793, due sono i lavori che danno lustro alla sua fama.

Il primo sono le **Adnotationes ad calculum integrelem Euleri**, del 1790. In esse, egli dimostra una notevole capacità di manipolare sviluppi in serie per calcolare una delle costanti più elusive della storia della matematica, la famosa costante γ che viene detta oggi giorno costante di Eulero-Mascheroni. Curiosamente, nessuno dei due usa la lettera γ ; Eulero usa A o C, Mascheroni sempre A. Notazione a parte, essa è definita dal seguente limite

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n), \text{ con } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

ma può essere ricondotta a moltissime altre espressioni, per esempio

- (Eulero) $\gamma = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right\} = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x} \right) dx$
 - $\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{z\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \right]$,
- ecc.

Lo stesso Eulero (Institutiones calculi integralis, vol. I) si dichiarava incapace di trovare una formula che riconducesse γ ad altre costanti note:

Ista formula integralis $\left[\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\log x} \right) dx \right]$ eo magis est notatu digna, quod eius valorem ostendi convenire cum eo quem praebet ista expressio $\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right]$, si numerus n sumatur infinite magnus, et quem per approximationem olim inveni esse 0,5772156649015325, cuius valorem nullo adhuc modo ad mensuras transcendentis iam cognitae redigere potui; unde haud inutile erit resolutionem huius formulae propositae pluribus modis tentare.

Si noti l'espressione "si numerus n sumatur infinite magnus" per indicare il limite (la parola limite non era ancora usata, e la sua introduzione formale dovrà attendere le Lezioni di Analisi di Cauchy per entrare a pieno titolo nel mondo della matematica).

Il problema della determinazione delle cifre decimali di γ era stato affrontato da Eulero, che ne aveva trovate 16. Mascheroni ne trova 32, ma purtroppo tre di queste (dalla ventesima alla ventiduesima) sono sbagliate. L'errore fu scoperto da Soldner nel 1809, quindi Gauss nel 1812 invitò il suo allievo Nicolai a cercarne altre.

| | |
|--|-----------------|
| 0,57721·56649·01532·5 | Eulero |
| 0,57721·56649·01532·86061·81120·90082·39 | Mascheroni 1790 |
| 0,57721·56649·01532·86060·65120·90082·402431·0421... | Nicolai |

Nel 1878 Adams ne trovò 263 cifre; oggi se ne conoscono quasi 30 miliardi, che risultano distribuite in modo uniforme (il che indicherebbe che γ è un numero normale). Ciononostante non si sa ancora neppure se γ sia irrazionale (per quanto, se dovesse essere razionale, il denominatore avrebbe almeno 242.000 cifre).

Ma torniamo a Mascheroni. Egli così commenta:

Quoniam ita fortasse impossibile est exhibere integrale $\int \frac{dz}{lz}$ per logarithmos aut per angulos, uti impossibile est exhibere integrale $\int \frac{dz}{z}$ per functionem algebraicam, inde dicendum erit hanc formulam $\int \frac{dz}{lz}$ singularem speciem functionum transcendentium suppeditare, quae accuratiorem evolutionem mereatur.

E più avanti prosegue:

Sed natura functionis $\int \frac{dz}{z}$ satis cognosci censetur, quia, licet non possit exprimi per functionem finitam algebraicam, tamen exprimitur per seriem, cuius summa est logarithmus z ; quae series talis est, ut eius constans pro casu $z = 1$ possit determinari et quae, si ipsa convergens non sit pro aliquibus valoribus ipsius z , tamen possit in alias convergentes transformari et quae demum exhibeat valores reales, quotienscumque tales valores competere debent formulae integrali $\int \frac{dz}{z}$.

Queste osservazioni sono didatticamente interessanti ancora oggi: come la funzione logaritmica è considerata perfettamente conosciuta, pur non essendo algebrica ma definita (o definibile) tramite una serie oppure, equivalentemente, con l'integrale di una funzione razionale, così la funzione $\int dz/\log z$ deve essere considerata perfettamente definita dall'integrale stesso, pur non avendo un nome. È noto infatti che mentre la derivazione di una funzione di una certa classe (polinomi, funzioni algebriche, funzioni elementari) fornisce una funzione della stessa classe, ciò non avviene per l'integrazione: se la primitiva di un polinomio è ancora un polinomio, quella di una funzione razionale può essere anche un logaritmo o un arcotangente, o una combinazione di questi e di funzioni razionali. È comunque una funzione elementare; ma la primitiva di una funzione elementare può non esserlo, appartenendo in generale alla classe di quelle "funzioni speciali", come la funzione degli errori, le funzioni ipergeometriche ecc., esprimibili mediante serie di potenze e attraverso esse facilmente esplorabili. Ad esse si dà un nome solo quando sono significative per qualche problema; per esempio Mascheroni propone di chiamare "iperlogaritmo" la funzione $\int dz/\log z$, oggi più comunemente designata come Logaritmo integrale $\text{Li}(x)$.

Mascheroni nota anche che la serie che dà il logaritmo deve assumere valori reali: ciò si situa nella discussione di quei tempi in cui non era chiaro che cosa significasse il logaritmo di un numero negativo. Mascheroni concorda con coloro che, correttamente, ritengono che esso sia un numero complesso.

L'altra opera che dà fama a Mascheroni è la famosa **Geometria del compasso** (1797). Di essa vi parlerà la prof. Gnudi; qui voglio solo ricordare che l'opera piacque molto a Napoleone, noto appassionato di matematica, cui Mascheroni dedicò, come grato ricordo del suo apprezzamento per il proprio lavoro geometrico, ma soprattutto della sua azione politica, questo componimento:

Mascheroni - A Bonaparte l'Italico

Io pur ti vidi con l'invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intimò pace,
Meco divider con ricurvi giri
Il curvo giro del fedel compasso.
E ti vidi ascoltar le chiuse rocche
D'ardui problemi col valor d'antico
Geometra maestro, e mi sovvenne
Quando l'Alpi varcasti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L'anno di tue vittorie, anno che splende
Nell'abisso de' secoli qual sole.
Segui l'impresa, e coll'invitta mano
Guida all'Italia tua liberi giorni.

Nell'ultima parte della sua vita, infatti, Mascheroni si avvicinò agli ideali della Rivoluzione Francese, fu nominato deputato alla Assemblea Legislativa della Repubblica Cisalpina, e da questa incaricato di introdurre in Italia il nuovo sistema metrico decimale che era appena stato messo a punto in Francia.

A questo scopo egli si recò a Parigi, dove dovette rimanere perché Milano era stata riconquistata dagli Austriaci, e a Parigi morì appena cinquantenne il 14 luglio 1800, per problemi polmonari.

A Parigi aveva conosciuto in particolare i membri della commissione metrologica (Borda, Condorcet, Laplace, Lagrange, Monge) incaricata di fissare lo standard per il metro, che sarà, come è noto, un decimilionesimo della distanza tra il Polo Nord e l'Equatore.

Il presidente di tale commissione, Jean-Charles de Borda (Dax 1733 – Paris 1799) era famoso per aver inventato uno strumento topografico, detto cerchio ripetitore a riflessione, per la misura accurata degli angoli. Alla sua morte, Mascheroni aveva composto una elegia in latino, che non sono riuscito a ritrovare. Nella Biblioteca Mai di Bergamo si conservano due minute di Mascheroni che fanno cenno di queste attività; ecco le schede che le descrivono:

1916

24-03-1799, Parigi

Mascheroni Lorenzo a Ministro delle Relazioni Estere (Repubblica Cisalpina)

Informa circa l'attività della Commissione speciale nominata dalla «Commissione Generale per la Fissazione dei Pesi e Misure» con l'incarico di verificare le misure effettuate dei «primi tre gradi del meridiano dell'Equatore» e «ricavare definitivamente da esse regole la grandezza del metro». Accenna alla pubblicazione della propria elegia in morte del Borda. Il documento, che reca la data repubblicana «4 Germ. anno 7», è pubblicato in *Par.*, p 261.

Autografo

Minuta di lettera, cc. 2, 243x190

Bergamo Biblioteca "A. Mai", MMB662, 89-90

1919

29-03-1799, Parigi

Mascheroni Lorenzo a Ministro delle Relazioni Estere (Repubblica Cisalpina) Riferisce quanto intende fare la Commissione di cui è membro «per formare i campioni delle nuove misure» e accenna al gradimento espresso dal Vice ammiraglio della Marina Rosily per la sua elegia in morte del Borda. Usa la data repubblicana «9 Germinale anno 7». Il documento è la seconda versione ampliata della minuta con la medesima data (si veda MMB662, 90 verso del foglio) che appare interrotta ed è ripresa qui nella parte finale. Entrambe le versioni sono pubblicate in *Par.*, p. 262.

Autografo

Minuta di lettera, cc. 2, 230x180

Bergamo Biblioteca "A. Mai", MMB662, 90 e 93

Per concludere, ricordo che un ben più famoso poeta, Vincenzo Monti, commemorò la morte di Mascheroni in un poema, *La Mascheroniana*, in cui immagina che l'anima di Mascheroni, salita al cielo, venga accolta dagli spiriti magni della letteratura e della matematica. Eccone due passi. Il primo si riferisce ad Archimede; è il Sole che parla e cita i due risultati più famosi del siracusano, la quadratura della parabola (la curva del cadere de' proietti creata) e la determinazione del volume (il contenere) della sfera ("contenta" perché contenuta nel cilindro, secondo la nota dimostrazione).

V. Monti (La Mascheroniana, I, 85-90)

colui che strinse ne' suoi specchi arditi
di mia luce gli strali e fe' parere
cari a Marcello di Sicilia i liti;
primo quadrò la curva del cadere

de' proietti creata, e primo vide
il contener delle contente sfere.

Il secondo brano invece descrive l'incontro con Borda, morto l'anno precedente, che anche in cielo va misurando l'arco equatoriale "che l'ombra fa cader più corta", e a cui Mascheroni ricorda l'elegia con cui lo aveva pianto "su latino / non vil plettro il mio duol fu manifesto".

La Mascheroniana, I, 129-140

Ed ecco a suo rincontro una leggiara
lucida fiamma, che nel grembo porta
una dell'alme di cui fea preghiera.
Qual fu suo studio in terra, iva l'accorta
misurando del cielo alle vedette
l'arco che l'ombra fa cader più corta.
- Oh mio Lorenzo! - oh Borda mio! - Fur dette
queste, e non più, per lor, parole: il resto
disser le braccia al collo avvinte e strette.
- Pur ti trovo. - Pur giungi. - Io piansi mesto
l'amara tua partita, e su latino
non vil plettro il mio duol fu manifesto.

Bibliografia e sitografia

J.W.L. Glaisher, *History of Euler's constant*, Messenger of Math., (1872), vol. 1, p. 25-30
Havil, J, Gamma, Exploring Eulers' Constant. Princeton Univ. Press, 2003

<http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html>
<http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstantDigits.html>
<http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniIntegrals.html>
https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Mascheroni_constant

http://www.bibliotecamai.org/cataloghi_inventari/carteggi/carteggio_mascheroni/mascheroni_1791.html

https://it.wikisource.org/wiki/Indice:Invito_a_Lesbia_Cidonia_ed_altre_poesie.djvu