Matematica senza frontiere?

C. Merlo
c.merlo4@campus.unimib.it

Riassunto

Nella relazione sono presentati alcuni risultati di uno studio comparato dei programmi di matematica nei licei di Italia, Francia ed Inghilterra. Lo scopo è di illustrare brevemente alcune delle principali differenze riscontrate.

• Introduzione

Lo scopo di questa breve relazione è di presentare i risultati di uno studio comparato dei programmi di matematica nei licei di Italia, Francia ed Inghilterra, condotto attraverso la mia tesi di laurea magistrale presso l'Università di Milano Bicocca. Questo studio è stato suggerito dall'osservazione che mentre esistono numerose ricerche sul sistema scolastico italiano, sulle sue criticità e sulle possibili proposte di intervento, sono rari gli studi di confronto con altri sistemi educativi vigenti nelle nazioni della comunità europea. Nella tesi mi sono proposta di colmare parzialmente questa lacuna.

L'obiettivo della tesi è stato quello di "fotografare" la situazione dell'insegnamento della matematica nei licei di Italia, Francia ed Inghilterra basandomi sull'analisi dei libri di testo in adozione. In questo confronto ho preso in considerazione i contenuti disciplinari impartiti, la scansione temporale degli stessi e le metodologie didattiche utilizzate per presentarli.

I risultati dello studio evidenziano l'esistenza di notevoli differenze di metodo e di contenuto. I testi inglesi e francesi, che mostrano notevoli affinità tra di loro, differiscono in maniera sostanziale dai testi italiani. In questa relazione mi propongo di illustrare brevemente alcune delle principali differenze riscontrate.

• Quali scuole e quali testi?

Il primo problema che mi sono trovata ad affrontare all'inizio del mio lavoro di tesi è stato di decidere come procedere al confronto tra sistemi scolastici così differenti; in particolare quali scuole mettere a confronto.

I cicli scolastici delle tre nazioni hanno diverse durate e sono organizzati secondo criteri non omogenei. In Italia ai tre anni di scuola media si susseguono cinque anni di liceo; in Francia dopo quattro anni di Collège si affrontano tre anni di Lycée; in Inghilterra a cinque anni di Middle Year Programme seguono due anni di Diploma Programme. Ho scelto di mettere a confronto:

- il liceo scientifico italiano,

- l'ultimo anno di Collège ed il liceo ad indirizzo scientifico francese,
- gli ultimi due anni di Middle Year Progamme e il Diploma Programme inglesi ad indirizzo matematico scientifico,

secondo lo schema mostrato in tabella.

Durata	**Italia**	**Francia**	**Inghilterra**
11-12 anni	Sec. I grado:1°	Collège:sixième	M.Y.P.:grade 7
12-13 anni	Sec. I grado:2°	Collège:cinquième	M.Y.P.:grade 8
13-14 anni	Sec. I grado:3°	Collège:quatrième	M.Y.P.:grade 9
14-15 anni	Liceo:1°	Collège:troisième	IGCSE:grade 10
15-16 anni	Liceo:2°	Lycée:seconde	IGCSE:grade 11
16-17 anni	Liceo:3°	Lycée:première	IB:grade 12
17-18 anni	Liceo:4°	Lycée:terminale	IB:grade 13
18-19 anni	Liceo:5°	-	-

Il secondo problema è stata la scelta dei testi da mettere a confronto. Per quanto riguarda l'Italia e la Francia non ho avuto particolari difficoltà in quanto i diversi testi proposti in ciascuna nazione presentano una sostanziale uniformità nella scelta sia dei contenuti che dei metodi. Per l'Italia ho preso in considerazione i testi più adottati pubblicati dalle tre principali case editrici Zanichelli, Ghisetti e Corvi e Petrini; constatata la loro sostanziale somiglianza la mia scelta è caduta sul testo *La nuova matematica a colori* edito da Petrini. Per la Francia ho preso in considerazione i due volumi maggiormente adottati pubblicati delle case editrici Hachette e Nathan. Ho scelto il testo *MathsDéclic* della Hachette.

Per quanto riguarda le scuole inglesi il problema era più complesso. Mi sono infatti trovata davanti al dilemma di scegliere tra i programmi utilizzati nelle scuole tradizionali inglesi e quelli utilizzati nelle scuole internazionali. Mi riferisco all'International General Certificate of Secondary Education (ICGCSE) per i gradi 10 e 11 e all'International Baccalaureate (IB) per i gradi 12 e 13. Le maggiori case editrici inglesi, Oxford e Cambridge, da me interpellate, mi hanno consigliato come testi per la preparazione dei gradi 12 e 13 due testi finalizzati al conseguimento dell'IB. Constatato che questi programmi sono ampiamente adottati e riconosciuti nelle scuole di lingua inglese sia in Inghilterra che all'estero, comprese quelle in Italia, ho deciso di accettare il consiglio delle case editrici e delle scuole inglesi in Italia prendendo come testi di riferimento per la scuola inglese *Cambridge IGCSE.Mathematics* e *Mathematics higher level for IB diploma*. Faccio presente che il programma IB è stato adottato in più di 4100 scuole nel mondo e viene riconosciuto come titolo abilitante in oltre 2000 università, comprese quelle Italiane, Francesi e Tedesche

• Prima sorpresa: quanta matematica?

Ho prima affermato che tra i testi in adozione in Italia e quelli in adozione in Francia ed Inghilterra sussistono profonde differenze di contenuto, di metodo e di organizzazione. Per descrivere tali differenze bisogna necessariamente entrare nella discussione dei programmi.

Tuttavia una prima differenza balza all'occhio prima ancora di aver aperto i testi a disposizione. I libri italiani sono molto più voluminosi di quelli inglesi e francesi. I cinque volumi del liceo scientifico italiano si estendono per più di 4000 pagine, gli analoghi testi inglesi e francesi, per quattro anni di scuola, superano di poco le 1500 pagine.

In altre parole gli studenti italiani devono studiare quasi il triplo di pagine dei loro compagni inglesi e francesi. Dunque lo studente italiano viene assoggettato ad un carico di studio apparentemente molto superiore a quello di un suo pari inglese e francese. La seguente tabella mostra la differenza nelle pagine dei volumi adottati anno per anno. Sottolineo che questa differenza non dipende dalla scelta del particolare testo di riferimento.

<table>
<tr><th>Italia</th><th>Pag.</th><th>Inghilterra</th><th>Pag.</th><th>Francia</th><th>Pag.</th></tr>
<tr><td>Liceo:1°</td><td>947</td><td rowspan="2">M.Y.P.: 10
M.Y.P.: 11</td><td rowspan="2">627</td><td rowspan="2">Collège:3°</td><td rowspan="2">265</td></tr>
<tr><td>Liceo:2°</td><td>899</td></tr>
<tr><td>Liceo:3°</td><td>788</td><td rowspan="3">D.P.: 12
D.P.: 13</td><td rowspan="3">918</td><td>Lycée:2°</td><td>351</td></tr>
<tr><td>Liceo:4°</td><td>720</td><td>Lycée:1°</td><td>399</td></tr>
<tr><td>Liceo:5°</td><td>784</td><td>Lycée:T</td><td>495</td></tr>
<tr><td>Totale</td><td>4138</td><td></td><td>1545</td><td></td><td>1510</td></tr>
</table>

Quale significato attribuire alle differenze messe in luce dalla tabella precedente? A mio giudizio questa discrepanza quantitativa non è altro che il primo segnale di una profonda differenza espositiva e metodologica nell'insegnamento della matematica che si riscontra nelle tre nazioni considerate. Una prima spiegazione potrebbe essere che la presentazione della matematica fatta nel testo italiano è più completa e copre più argomenti di quanto facciano i corrispondenti testi francesi ed inglesi. In questa interpretazione la maggiore estensione dei testi italiani rappresenterebbe una qualità. Un'altra interpretazione potrebbe essere che i testi italiani risultano più prolissi e meno efficacemente organizzati degli altri due. Per vedere quale di queste due possibilità è più aderente alla situazione reale è obbligatorio entrare nella discussione tecnica degli argomenti.

• Diverse metodologie didattiche

Lo studio comparato dei tre testi menzionati deve essere condotto sia dal punto di vista delle metodologie didattiche utilizzate che dal punto di vista dei contenuti. Occupiamoci anzitutto dello stile di presentazione.

Lo stile del testo italiano si ispira ad una presentazione di tipo assiomatico-formale della matematica. L'ambizione è di far scoprire allo studente la struttura logica di questa disciplina e di insegnargli a dedurre le sue proposizioni a partire da una base limitata di assiomi. Nei testi francesi ed inglesi la metodologia di insegnamento è più vicina ad un approccio di tipo intuitivo e sperimentale. In essi gioca un ruolo importante l'attività di scoperta delle proprietà matematiche. La teoria è presentata solo come strumento che serve a sistematizzare un'esperienza precedentemente acquisita.

Ad esempio nel testo francese un ruolo importante è svolto dagli "esercizi di scoperta". Ogni capitolo si apre con esercizi volti ad introdurre gli argomenti che verranno poi trattati nella successiva sezione teorica, suggerendone anche un'idea di dimostrazione. Il libro francese risulta conciso ed essenziale: in ogni capitolo 6 pagine sono dedicate in media agli esercizi di scoperta, 5 alla teoria e le restanti 15 pagine contengono svariati approfondimenti e gli esercizi di verifica, proponendo di volta in volta anche lavori di gruppo.

Anche il testo inglese è conciso e schematico e basato sui "worked examples". In media la lunghezza dei capitoli è attorno alle 25 pagine, come nel testo francese, di cui la maggior parte riempite da esempi. Nel testo inglese non si trova l'enunciato di un' assioma. Abbandonata qualsiasi forma di astrattezza cerca di avvicinarsi il più possibile alla realtà attraverso applicazioni dei concetti studiati in ambito economico e non solo.

Per contro i capitoli del testo italiano hanno una dimensione quasi doppia che varia tra le 50 e le 60 pagine. I capitoli si aprono solitamente introducendo una questione teorica, formalizzando le regole di calcolo e terminando con applicazioni ed approfondimenti. Si può dire che nel testo italiano la teoria precede le applicazioni mentre nei testi inglesi e francesi le applicazioni servono ad introdurre la teoria.

Passiamo ora all'analisi dei contenuti e della loro scansione temporale. Partiamo dai tre volumi del liceo scientifico francese le cui "tables des matières" sono riunite nella seguente tabella.

Volume classe seconda Lycée	
1 Généralités sur les fonctions	8
2 Fonction affines. Problèmes du premier degré	36
3 Fonction carré. Problèmes du second degré	60
4 Fonction inverse.Fonction homographiques	88
5 Résolution d'équations et d'inéquations	110
6 Trigonométrie	136
7 Statistiques	156
8 Probabilités	180
9 échantillonnage	206
10 Bases en géométrie	222
11 Géométrie dans l'espace	246
12 Droites dans le plan	270
13 Les vecteurs dans le plan	294

Volume classe prima Lycée	
1 Second degré	18
2 Fonction se référence	46
3 Dérivation	74
4 étude des variation d'une fonction	100
5 Suites numériques-Généralités	132
6 Suites arithmétiques et géométriques	164
7 Géométrie plane	198
8 Trigonométrie	228
9 Produit scalaire	254
10 Statistiques	286
11 Probabilités	310
12 Loi binomiale	336

Volume classe terminale Lycée	
1 Suites numériques	12
2 Limites et continuité	50
3 Compléments sur les fonctions numériques	90
4 Fonction exponentielle	118
5 Fonction logarithme népérien	150
6 Calcul intégral	182
7 Les nombres complexes	222
8 Droites et planes de l'espace-Vecteurs	
9 Produit scalaire de l'espace	290
10 Probabilités conditionnelles	326
11 Lois de probabilité continues	362
12 échantillonnage et estimation	402

Una prima osservazione che merita di essere fatta riguarda la struttura dei singoli volumi. Ogni volume è organizzato attorno a tre nuclei tematici: Teoria delle funzioni, Geometria e Statistica/probabilità (questo schema riprende la struttura dei testi del Collège dove, in modo del tutto analogo, si alternavano le sezioni di Aritmetica, Geometria, Elaborazione dati e Grandezze e misure). Questa sistematicità fornisce un'indicazione chiara ed organica del procedere dello studio. Gli argomenti centrali dei nuclei tematici non sono esauriti in un singolo anno di studio, ma sono ripresi ed approfonditi negli anni successivi secondo un piano di lavoro ben chiaro e delineato. Merita anche di essere osservato il diverso ordine (rispetto alla tradizione italiana) con cui sono introdotti i diversi argomenti. Per esempio il concetto di derivata viene anticipato al secondo anno di liceo e utilizzato immediatamente per lo studio delle variazioni di una funzione. Le funzioni esponenziali e logaritmiche vengono invece trattate all'ultimo anno dopo che sono stati introdotti i concetti di limite e continuità nella loro generalità.

Una struttura altrettanto chiara e sistematica caratterizza i testi inglesi di cui riporto gli indici nella seguente tabella.

Volume per IGCSE	
Unità 1	
Chapter 1: Reviewing number concepts	1
Chapter 2: Making sense of algebra	22
Chapter 3: Lines, angles and shapes	43
Chapter 4: Collecting, organising and displaying data	73
Unità 2	
Chapter 5: Fractions	98
Chapter 6: Equations and transforming formulae	119
Chapter 7: Perimeter, area and volume	128
Chapter 8: Introduction to probability	153
Unità 3	
Chapter 9: Sequences and sets	164
Chapter 10: Straight lines and quadratic equations	183
Chapter 11: Pythagoras' theorem ans similar shapes	206
Chapter 12: Averages and measures of spread	230
Unità 4	
Chapter 13: Understanding measurements	250
Chapter 14: Further solving of equations and inequalities	267
Chapter 15: Scale drawing, bearings and trigonometry	299
Chapter 16: Scatter diagrams and correlations	341
Unità 5	
Chapter 17: Managing money	351
Chapter 18: Curved graphs	370
Chapter 19: Symmetry and loci	397
Chapter 20: Histograms and frequency distribution diagrams	419
Unità 6	
Chapter 21: Ratio, rate and proportion	441
Chapter 22: More equations, formulae and function	471
Chapter 23: Transformations and matrices	487
Chapter 24: Probability using tree diagrams	533

Volume per IB	
Algebra	
1:Counting principle	1
Algebra, functions and equations	
2: Exponents and logarithms	28
3: Polynomials	58
4: Algebraic structure	87
5: The theory of functions	118
6: Transformation of graphs	154
7: Sequences and series	190
8: Binomial expansion	217
Geometry	
9: Circular measure and trigonometric function	232
10: Trigonometric equations and identities	273
11: Geometry of triangle and circles	304
12: Further trigonometry	346
13: Vectors	375
14: Lines and planes in space	413
Algebra	
15: Complex numbers	476
Calculus	
16: Basic differentiation and its applications	527
17: Basic integration and its applications	569
18: Further differentiation methods	599
19: Further integration methods	622
20: Further applications of calculus	659
Probability and statistic	
21: Summarising data	689
22: Probability	705
23: Discrete probability distribution	743
24: Continuous distribution	769
Algebra	
25: Mathematical induction	791

Il volume per l'IGCSE è suddiviso in Unità, ognuna delle quali si suddivide a sua volta in quattro capitoli aventi come nuclei tematici aritmetica, algebra, geometria e statistica/probabilità. Questi nuclei si susseguono alternandosi in modo che lo studente possa utilizzare di volta in volta le conoscenze di ogni settore per la comprensione degli altri. Così si sviluppano prima le conoscenze di aritmetica necessarie per trattare quelle nozioni di algebra che subito dopo sono applicate allo studio della geometria. Viceversa si utilizzano poi le nozioni geometriche per introdurre più agilmente nuovi argomenti algebrici. Più tradizionale è invece la struttura del volume IB. La suddivisione è piuttosto classica: *Algebra, Geometry, Calculus* e *Probability and statistics*. Si notano due differenze principali rispetto al testo italiano: lo sviluppo del Calculus è più operativo e meno approfondito da un punto di vista teorico dell'analisi infinitesimale del testo italiano; la trattazione della geometria è caratterizzata invece da un più accentuato utilizzo degli strumenti algebrici e del calcolo vettoriale. Questo è il programma comune a tutti gli studenti di indirizzo scientifico. Agli studenti che scelgono l'indirizzo matematico viene in più richiesto uno tra i seguenti quattro corsi caratterizzanti chiamati *Statistics and Probability, Sets, Relations and Groups, Calculus, Discrete mathematics*. Il contenuto di questi insegnamenti è riportato nella tabella seguente dalla quale si evince come gli argomenti trattati siano piuttosto complessi e di non facile trattazione a livello liceale. Per gli studenti ad indirizzo matematico il livello si alza immediatamente in maniera marcata.

Topic 7: Statistics and Probability	
1 Combining random variables	2
2 More about statistical distribution	22
3 Cumulative distribution function	38
4 Unbiased estimators and confidence interval	48
5 Hypothesis testing	71
6 Bivariate distributions	97
7 Summary and mixed examination practice	115

Topic 8: Sets, Relations and Groups	
1 Preliminaries: Proof by contradiction	3
2 Sets and operations	6
3 Ordered pairs, relations and functions	37
4 Groups and subgroups	67
5 Summary and mixed examination practice	119
Supplementary sheet: Groups of order 6	125

Topic 9: Calculus	
1 Limits of sequences and functions	3
2 Improper integrals	45
3 Infinite series	65
4 Maclaurin and Taylor series	99
5 Differential equations	123
6 Summary and mixed examination practice	149

Topic 10: Discrete mathematics	
1 Methods of proof	3
2 Divisibility and prime numbers	13
3 Representation of integers in different bases	33
4 Linear Diophantine equations	42
5 Modular arithmetic	51
6 Graph theory	67
7 Algorithms on graphs	98
8 Recurrence relations	134
9 Summary and mixed examination practice	149

Queste sono soltanto le prime considerazioni suggerite dalla lettura degli indici dei testi considerati. Farò ora alcune osservazioni più specifiche limitandomi però al campo della geometria.

• Quale geometria?

Lo studio comparato condotto nella tesi mostra che le più ingenti differenze si hanno nella presentazione della geometria. Per procedere al confronto raggruppiamo per comodità gli insegnamenti di geometria in cinque sezioni:

1. la geometria euclidea,
2. la geometrica cartesiana,
3. il calcolo vettoriale e l'algebra lineare,
4. la trigonometria,
5. le trasformazioni geometriche.

Per ognuna delle sezioni sopra indicate raccogliamo nelle tabelle che seguono gli indici dei capitoli dei tre testi ad essi inerenti accompagnati da alcuni commenti.

→ La geometria euclidea

ITALIA
I-14:Piano euclideo (14+13)
Introduzione alla geometria
Concetti primitivi,primi assiomi
Le parti della retta e le poligonali
Semipiani ed angoli
Poligoni
I-15:Dalla congruenza alla misura (12+14)
La congruenza
La congruenza ed i segmenti
La congruenza e gli angoli
Misure di segmenti
Misure di angoli
I-16:Congruenza nei triangoli (20+21)
Triangoli
I e II criterio di congruenza
Proprietà dei triangoli isosceli
Il III criterio di congruenza
Disuguaglianze nei triangoli
Costruzioni con riga e compasso
I-17:Rette parallele e perpendicolari (17+24)
Rette perpendicolari
Rette parallele
Criteri di parallelismo
Prop. degli angoli nei poligoni
Congruenza:triangoli rettangoli
I-18:Quadrilateri (17+19)
Trapezi
Parallelogrammi
Rettangoli,rombi e quadrati
Piccolo teorema di Talete
II-10:Circonferenza e cerchio (20+23)
Luoghi geometrici
Circonferenza e cerchio
Corde e le loro proprietà
Parti circonferenza e cerchio
Retta e circonferenza
Pos. reciproca di due circ.
Angoli alla circonferenza
II-11:Poligoni inscritti e circoscritti (13+16)
Poligoni inscritti e circoscritti
Triangoli inscritti e circoscritti
Quadrilateri in/circoscritti
Poligoni regolari in/circoscritti
Punti notevoli di un triangolo
II-12:Area (10+20)
Equivalenza,equiscomponibilità
Teoremi di equivalenza
Aree di poligoni
II-13:Teoremi di Pitagora e di Euclide (17+28)
Teorema di Pitagora
Applicazioni teorema Pitagora
Teoremi di Euclide
Prob.risolti per via algebrica
II-14:Teorema di Talete e similitudine (30+29)
Segmenti e proporzioni
Teorema di Talete
Similitudine e triangoli
Similitudine e poligoni
Similitudine e circonferenza
Similitudine e sezione aurea
Prob.applicazione similitudine
II-15:Complementi:circonferen. poligoni ins./circ. (10+10)
Lung. circ. e area del cerchio
Raggio circo/inscritta triangolo
Complementi poligoni in/circo.
IV-8:Rette, piani e figure nello spazio (43+28)
Int. alla geo. nello spazio
Perpendicolarità nello spazio
Parallelismo nello spazio
Proiezioni,distanze e angoli
Prismi,parallelepipedi e piramidi
Solidi di rotazione
Poliedri e poliedri regolari
Trasformazioni geo. nello spazio
IV-9:Misure di superfici e di volumi (18+31)
Misura di sup e vol nello spazio
Sup/vol parallelepipedi-prismi
Sup/vol piramide-tronco
Sup/vol cilindro-cono-tronco
Sup/vol sfera-parti sfera

INGHILTERRA
IGCSE 3:Lines, angles and shapes (30)
Lines and angles
Triangles
Quadrilaterals
Polygons
Circles
Construction
IGCSE 7: Perimeter, area and volume (25)
Perimeter,area in 2 dimension
Three-dimensional object
Surface,area,volumes of solids
IGCSE 11:Pythagoras'theorem and shapes (24)
Pythagoras' theorem
Understanding similar triangles
Understanding similar shapes
Understanding congruence

FRANCIA
Collège
Classe VI
G1:Cerchi e distanze
G2:Angoli retti
G4:Spazio
M1: Angoli
M2: Aree e perimetri
M3: Volumi
Classe V
G2:Triangoli
G3: Parallelogrammi
G4: Angoli
G5: Prismi e cilindri
M1: Aree
M2: Area laterale e volume
Classe IV
G1: Triangoli rettangoli
G2: Triangoli e erette parallele
G3: Distanze e tangenti
G5: Piramidi e coni
Classe III
G1: Teorema di Talete
G3: Geometria nello spazio
G4: Angoli e poligoni
Lycée
2^{de} **11:Géométrie dans l'espace (24)**
Objets dans l'espace
Positions relatives de droite et de plans dans l'espace

Il confronto suggerisce le seguenti osservazioni. Il testo italiano adotta un approccio assiomatico. Si preoccupa di formalizzare le definizioni e di caratterizzare rigorosamente i diversi enti geometrici a partire dagli assiomi. Il libro assume come primitivi i concetti di: punto, retta, piano, spazio, congruenza, estensione, lunghezza di una circonferenza e superficie. Inoltre seguendo la tradizione italiana introduce i concetti di ampiezza di un angolo, lunghezza di un segmento, area di una superficie e volume di un solido utilizzando la nozione astratta di classi di equivalenza. Sostituisce gli assiomi di Euclide con un sistema di 24 assiomi più moderno, ma anche più complicato, che si avvicinano a quelli di Hilbert. L'approccio alla geometria perde così concretezza e risulta piuttosto astratto. L'aver scelto di seguire un approccio rigoroso crea difficoltà didattiche.

Il testo inglese limita la trattazione della geometria euclidea a tre capitoli. L'approccio è schematico e sintetico. Le dimostrazioni vengono quasi del tutto tralasciate, limitandosi a sottolinearne l'importanza teorica, lasciando (nella maggior parte dei casi) allo studente l'onere della loro stesura. A differenza del testo italiano il testo inglese non enuncia alcun assioma. Anche nello studio delle proprietà metriche delle figure il testo inglese sorvola su ogni difficoltà teorica nella definizione dei concetti di lunghezza, area e volume, concentrandosi soprattutto sulle formule che permettono di calcolare tali grandezze per le figure più comuni. La trattazione inglese della geometria euclidea, svolta durante l'IGCSE, ha più il carattere di un ripasso che quello di una presentazione vera e propria. Tale ramo della geometria non sarà più ripreso negli studi successivi.

Nella scuola francese la presentazione della geometria euclidea è essenzialmente limitata al Collège. Qui si fa ampio uso di un approccio sperimentale, che utilizza spesso un software geometrico per la scoperta delle proprietà delle figure. Un ruolo speciale è riservato agli esercizi di apertura, attraverso i quali lo studente scopre, prova e formalizza le proprietà delle figure.

Si può quindi pensare di trarre le seguenti conclusioni. Il testo italiano risulta rigoroso, completo e piuttosto articolato nella trattazione. La scelta di una presentazione razionale della geometria va a scapito della fase della scoperta individuale delle proprietà geometriche e ne riduce l'impatto sull'immaginazione dello studente. Il testo inglese è schematico, essenziale e diretto. Tuttavia una trattazione così essenziale risulta talvolta arida e ancora una volta si perde lo spirito di scoperta tipico della trattazione euclidea. Il testo francese per il Lycée dà per assimilata la geometria euclidea, passando direttamente a quella cartesiana. Nel testo per il Collège si adotta invece un punto di vista pratico, ma piuttosto semplificato essendo il testo rivolto a studenti di età inferiore.

Prima di concludere faccio anche osservare che lo studio della geometria euclidea nello spazio viene fatto in Inghilterra al primo anno, nel capitolo 7, dove con le formule per il perimetro e le aree delle figure piane si presentano anche le formule per i volumi e le superfici laterali dei solidi. In Francia i solidi sono introdotti al Collegè sin dalla classe sesta e vengono ripresi al primo anno di Lycée. Solo in Italia lo studio della geometria nello spazio è rimandato al quarto anno di liceo, preferendo dapprima introdurre la geometria cartesiana nel piano.

→ La geometria cartesiana

ITALIA	
II-3:Rette nel piano cartesiano	**(29+38)**
Richiami sul piano cartesiano	
Distanza tra due punti	
Punto medio di un segmento	
La funzione lineare	
L'equazione generale della retta	
Rette$\parallel$,pos.reciproca di due rette	
Rette perpendicolari	
Come det. l'eq.di una retta	
Distanza di un punto-retta	
Semipiani,segmenti,semirette, angoli,poligoni nel piano cart.	
Prob.che hanno modelli lineari	
III-7: Circonferenza	**(25+39)**
L'equazione della circonferenza	
La circonferenza e la retta	
Come det.l'eq.di circonferenza	
Pos.reciproca di 2 circonferenze	
Fasci di circonferenze	
La circonferenza e le funzioni	
III-8:Parabola	**(30+41)**
Le parabole con vertice in O	
Parabole asse$\parallel$ a asse cartesiano	
La parabola e la retta	
Come det. l'eq.di una parabola	
Fasci di parabole	
La parabola e le funzioni	

III-9:Ellisse	**(19+23)**
L'equazione dell'ellisse	
L'ellisse e la retta	
Come det. l'eq. di una ellisse	
Ellissi traslate	
L'ellisse e le funzioni	
III-10:Iperbole	**(26+30)**
L'equazione dell'iperbole	
Iperbole equi./funz.omografica	
L'iperbole e la retta	
Come det. eq. di iperbole	
Iperboli traslate	
L'iperbole e le funzioni	
III-11: Coniche e luoghi geometrici	**(22+24)**
Le coniche	
Pos.reciproca tra due coniche	
Le coniche e i luoghi	
Le coniche e le dis.di II grado	
Discussione di sistemi par.misti	

FRANCIA	
Lycée 2^{de}:10 Bases en géométrie	**(24)**
Coord. d'un point dans un plan Dist. dans un repère orthonormé Étude de configurations du plan	
Lycée 2^{de}:12 Droites dans le plan	**(24)**
Caractériser une droite dans le plan muni d'un repère	
Droites parallèles, sécantes dans le plan repéré	

Lo studio della geometria cartesiana è quasi del tutto assente nel testo inglese, salvo alcuni cenni nella parte dedicata allo studio dei grafici di funzioni e alla risoluzione grafica di equazioni. Il testo inglese sceglie di abbandonare l'approccio strettamente cartesiano alla geometria, preferendo concentrarsi sul calcolo vettoriale e l'algebra lineare, strumenti più moderni e semplici.

Il testo francese per il Lycée dedica invece due capitoli del libro per il primo anno alla geometria cartesiana. In questa parte il testo sottolinea più volte le differenze che intercorrono tra la trattazione analitica e cartesiana degli enti geometrici, quali ad esempio la retta. Da una parte essa è studiata come grafico di una funzione affine; dall'altra essa è vista come un particolare ente geometrico descritto da un'equazione in uno specifico riferimento cartesiano. Questa distinzione è tacita nel testo italiano.

Qui dopo due capitoli di natura generale, simili per contenuto ai due capitoli francesi sopra citati, si dedicano ben cinque capitoli, per un totale di 279 pagine, allo studio delle coniche. Tale studio è assente nelle altre trattazioni europee da noi prese in considerazione. In Italia lo studio della geometria cartesiana del terzo anno è quindi in gran parte monopolizzato da una minuziosa analisi delle coniche e delle loro proprietà. Questa scelta costringe a ridurre ad un solo capitolo la trattazione del calcolo vettoriale e dell'algebra lineare, contrariamente a quanto accade sia in Francia che in Inghilterra. Il calcolo vettoriale nel volume italiano compare solo nel capitolo 10 del IV volume, in cui si propone di estendere lo studio della geometria cartesiana allo spazio. Ciò risulta piuttosto complicato e abbandonando l'approccio prettamente cartesiano il testo sceglie di introdurre ed utilizzare i vettori. Abbiamo quindi scelto di inquadrare questo capitolo nella sezione dedicata al calcolo vettoriale e all'algebra lineare.

Approfondendo l'analisi mettiamo a confronto il capitolo 3 del II volume del testo italiano con i capitoli 10 e 12 del volume per la classe seconda del Lycée. Troviamo in questo caso una analogia sia per gli argomenti sviluppati che per numero di pagine: 48 nel caso francese e 69 nel caso italiano. Le analogie però si fermano qui. Si riscontrano importanti differenze sia stilistiche che metodologiche. A riprova di ciò riportiamo a titolo esemplificativo, senza ulteriori commenti, alcune definizioni estratte dai due volumi menzionati.

Partiamo dal concetto di coordinate. Nel testo italiano non si dà una definizione vera e propria di coordinate e neppure una definizione operativa delle stesse. All'inizio del terzo capitolo del volume II ci si limita ad affermare che (pag.141):

> Fra i punti del piano cartesiano e le coppie ordinate dell'insieme $R \times R$ è possibile instaurate una corrispondenza biunivoca: a ogni punto P del piano cartesiano corrisponde un'unica coppia ordinata (x,y), costituita dalle coordinate di P, cioè dalle distanze ''con segno'' di P, rispettivamente, dall'asse x e dall'asse y. Viceversa ad ogni coppia ordinata (x,y) corrisponde un unico punto del piano cartesiano che ha quelle coordinate. I numeri reali x e y che costituiscono le coordinate di P vengono detti rispettivamente, ascissa e ordinata di P[...].

Nel testo francese invece:

> *Définitions* Repérer un point M dans le repère orthonormé (O,I,J) du plan, c'est donner l'unique couple de nombres (x;y), appelé coordonnées du point M, et obtenu de la facon suivantes:
> - on construit le parallélogramme OPMQ où le point P appartient à l'axe des abscisses (O,I) et le point Q appartient è l'axe des ordonnées (O,J);
> -x et y repèrent respectivement les point P et Q sur chacun des axes (O,I) et (O,J).
> x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M.

Altrettanto significativo è il modo in cui i due testi introducono la nozione di retta. Nel testo francese:

> Si une droite δ représente, dans le plan rapporté à un repère (O,I,J), la fonction affine $f : x \to mx + p$, on dite que $y = mx + p$ est une équation de la droite δ dans le repère (O,I,J). On note $\delta :$ $y = mx + p$

Questa definizione è posta in apertura del capitolo dedicato allo studio delle rette, subito dopo gli esercizi di scoperta.

Nel testo italiano invece, nel paragrafo 4, capitolo 3 del volume II si richiama il concetto di funzione lineare:

> Ricordiamo anzitutto che una funzione viene detta lineare se è definita da un'equazione del tipo: $y = mx + q$. Abbiamo già visto[...] che il grafico di una funzione lineare è una retta.

Il testo procede studiando: come tracciare il grafico, come trovare le intersezioni con gli assi, i coefficienti m e q e le funzioni lineari a tratti. All'inizio del paragrafo 5 riprende con la seguente affermazione(pag.150):

> [...] abbiamo utilizzato il piano cartesiano come ambiente per tracciare il grafico di una funzione lineare. In questo paragrafo, invece, adotteremo il punto di vista tipico della geometria analitica: quello di caratterizzare le figure geometriche algebricamente. [...] Cercheremo di determinare ''l'equazione'' di una generica retta, cioè di scrivere un'equazione che sia soddisfatta dalle coordinate di tutti e soli i punti della retta.

Ad una prima lettura le due definizione sembrano rassomigliarsi. Tuttavia nell'approccio francese c'è una sottolineatura importante che manca nel testo italiano. Nella definizione francese si menziona esplicitamente il riferimento cartesiano ortogonale (O,I,J). Si può quindi dire che in Francia si fa uso del piano cartesiano inteso come un piano euclideo munito di un riferimento cartesiano ortogonale; in Italia la geometria analitica è invece sviluppata nello spazio $\mathbb{R}^2$, cioè nello spazio delle coppie di numeri reali. L'approccio francese è più intrinseco e porterà direttamente al punto di vista moderno fondato sull'algebra lineare e sul calcolo vettoriale. Nell'impostazione italiana non si prende mai in considerazione la possibilità di considerare diversi sistemi di coordinate. Incidentalmente osservo che questa diversità di presentazione permette al testo francese di introdurre anche i riferimenti cartesiani non ortogonali, separando così la geometria affine dalla geometria euclidea.

→ Il calcolo vettoriale e l'algebra lineare

FRANCIA	
Lycée	
2^{de} **13: Les vecteurs dans le plan**	**(30)**
Notion de vecteur	
Coordonnées de vecteurs	
Somme de vecteurs	
Produit d'un vecteur par un réel	
Colinéarité de deux vecteurs	
1^{re} **7:Géométrie plane**	**(30)**
Colinéarité de deux vecteurs	
Exp. d'un vecteur en fonction de 2 vecteurs non colinéaires	
Éq. cartésiennes d'un droite	
1^{re} **9:Produit scalaire**	**(32)**
Produit scalaire de 2 vecteurs	
Prop.algébriques produit scalaire	
Applic.au calcul long.et d'angles	
Orthogonalité	
Applic.aux formules de trig.	
Ts **8: Droites et planes de l'espace- Vecteurs**	**(34)**
Pos.relatives de droites/plans	
Caractérisations vectorielles	
Repères de l'espace	
Ts **9: Produit scalaire de l'espace**	**(36)**
Produit scalaire dans l'espace	
Propriétés du produit scalaire	
Orthogonalité dans l'espace	

INGHILTERRA	
IB 13:Vectors	**(38)**
Positions and displacements	
Vector algebra	
Distances	
Proprieties of the scalar product	
Area	
Proprieties of the vector product	
IB 14:Lines and planes in space	**(63)**
Vector equation of a line	
Solving problem with line	
Other forms of eq.of a line	
Equation of a plane	
Angles,intersection lines/planes	
Intersection of three planes	
Solving prob. lines and planes	

ITALIA	
IV-10:Geometria analitica nello spazio	**(15+17)**
Int.alla geo.analitica nello spazio	
Eq.piano e cond.parallelismo	
Eq.retta e cond.parallelismo	
Dist.punto-retta/piano	
Superficie sferica e sfera	

I percorsi inglese e francese trovano il loro apice nella trattazione del calcolo vettoriale e nell'introduzione dell'algebra lineare. Buona parte dei corrispondenti programmi è dedicata allo studio di tale ramo della matematica, che permette una trattazione unificata del caso piano e di quello spaziale. Come già affermato nella sezione precedente, il testo italiano dedica invece un solo capitolo (anche piuttosto breve) al calcolo vettoriale e più in generale all'algebra lineare. É pur vero che nel secondo volume un capitolo è dedicato alla risoluzione dei sistemi lineari, ma questo argomento è visto sotto l'ottica piuttosto ristretta della teoria delle equazioni. Al calcolo vettoriale, essenziale nello studio della Fisica, viene così assegnato un ruolo decisamente secondario.

Passando ad un confronto per contenuti posso paragonare il capitolo 13 del testo IB, con i capitoli 13 della classe seconda e 7,9 della classe prima del Lycée francese. Il 14 IB con 8,9 della classe terminale del liceo francese e con il capitolo 10 del IV volume italiano.

In questo caso il testo inglese è quello più conciso ed essenziale. In meno di 100 pagine sviluppa il calcolo vettoriale e l'algebra lineare adottando al solito uno stile pragmatico.

Il testo francese invece adotta uno stile di presentazione ciclico, simile a quello utilizzato nei testi del Collège. Infatti distribuisce l'argomento sui tre anni andando via via ad approfondirne la conoscenza.

Il testo italiano sintetizza tutto il calcolo vettoriale nello spazio di sole 32 pagine. La trattazione italiana(volume 4 cap.10) si apre con la seguente affermazione:

> `Per lo studio di rette e piani in uno spazio cartesiano ortogonale, è particolarmente utile avvalersi del linguaggio dei vettori. Anche per i vettori si estendono naturalmente allo spazio le proprietà introdotte nel piano come hai potuto vedere nei tuoi studi precedenti.`

Il testo procede quindi ricordando la scrittura in componenti e la nozione di modulo. Assume due teoremi inerenti le operazioni tra vettori e le condizioni di parallelismo e perpendicolarità. Passa infine allo studio di piani e rette nello spazio. Se andiamo a ricercare dove e come sono introdotte la nozione di vettore, le operazioni sui vettori, le componenti di un vettore bisogna risalire molto indietro nel testo. Per la definizione di vettore e di modulo di un vettore si deve tornare al capitolo 19 del primo volume. Ci accorgiamo che la trattazione è limitata ad una sola pagina(pag.826). Per la definizione di componenti dobbiamo invece saltare al capitolo 6 del volume III, dove le componenti di un vettore sono brevemente introdotte in forma strumentale per studiare dal punto di vista analitico le traslazioni nel piano. Manca la definizione delle operazioni sui vettori nel caso piano. In altre parole l'uso dei vettori è subordinato allo studio delle isometrie e manca di una propria indipendenza.

A riprova delle differenze di trattazione che intercorrono tra i tre testi riportiamo(a titolo di esempio) come i tre libri introducono e definiscono il concetto di vettore. Italia(pag.827,vol.I):

> Si chiama vettore ciascuna delle classi di equivalenza individuate, nell'insieme dei segmenti orientati, dalla relazione di equipollenza.

Francia(pag.298, vol.2^{de}):

> *Définition*:La translation qui transforme A en B est appelée de vecteur $\vec{AB}$.

Inghilterra(pag.375, vol. IB):

> You may know from physics that vectors are used to represent quantities which have both magnitude(size) and direction, such as force or velocity. Vector quantities are different from scalar quantities which are fully described by a single number. In pure mathematics, vectors are used to represent displacement from one point to another, and so to describe geometrical figures. If there is a fixed point A and B is 10 cm away from it, this information alone does not tell you where point B is. The position of B relative to A can be represented by the vector displacement $\vec{AB}$. The vector contains both distances and direction informations; it describes a way of getting from A to B.

→ La trigonometria

INGHILTERRA
IGCSE
15:Scale drawings, bearings and trigonometry (41)
Scale drawings
Bearings
Under. the tan,cos and sin ratios
Solving problems using trig.
Angles between 90° and 180°
The sine and cosine rules
Area of triangle
Trig. in three dimensions
IB
9:Circular measure and trig. functions (41)
Radian measure
Def. and graphs of sin and cos
Def. and graphs of tan function
Exact values of trig. functions
Transformations of trig. graphs
Modelling using trig. functions
Inverse trigonometry functions
11:Geometry of triangles and circles (42)
Right-angled triangles
The sine rules
The cosine rule
Area of triangle
Trig. in 3 dimensions
Length of an arc
Area of sector
Triangles and circles

ITALIA
IV-1:Gli angoli e le funzioni goniometriche (42+35)
Angoli e loro misure
Le def.delle funz.goniometriche
Le prop. funz.goniometriche
Angoli associati
Grafici funz.goniometriche
Funzioni goniometriche inverse
Reciproche funz.goniometriche
IV-2:Formule e identità goniometriche (21+35)
Formule addizione e sottrazione
Formule duplicazione e bisezione
Formule parametriche
Formule Werner e prostaferesi
Formule gon. e la geo. analitica
Le formule gon. e le funz.
IV-5:Trigonometria (32+35)
Teoremi sui triangoli rettangoli
App.teo. triangoli rettangoli: area triangolo,teorema corda
Problemi sui triangoli rettangoli con eq.,disequazioni e funzioni
Teoremi sui triangoli qualunque
Problemi sui triangoli qualunque con eq., disequazioni e funzioni

FRANCIA
Collège
Classe IV
G4: Coseno
Classe III
G2: Trigonometria
Lycée
2^{de} **6:Trigonométrie (20)**
Enroulement de droite des $\mathbf{R}$ sur le cercle trigonométrique
Cosinus/sinus d'un nombre $\mathbf{R}$
1^{re} **8:Trigonométrie (26)**
Mesures angles orientés de vect.
Cos et sin d'angles "associés"
Prop.des angles orientés de vect.
Équations $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$

La trigonometria costituisce quello che potremmo definire l'unico punto di incontro delle tre trattazioni. Infatti nonostante le lievi differenze che si riscontrano nei tre modi di procedere il percorso seguito è piuttosto standard e le trattazioni sono più o meno equivalenti. Una nota va fatta sulla posizione di tale trattazione all'interno del percorso: stupisce che la trigonometria sia introdotta agli studenti francesi sin dal Collège, mentre a quelli italiani viene spiegata solo al quarto anno di liceo.

Osservo che se nel testo inglese andassi a dividere la parte strettamente teorica dai worked examples e dagli esercizi, scoprirei che essa consta di circa 40 pagine. Se operassi la stessa suddivisione per il testo francese scorporando questa volta gli esercizi di apertura e quelli conclusivi troverei che la trattazione teorica si limita a sole 20 pagine. Nel caso italiano invece si ha un totale di 74 pagine(escludendo il capitolo *Formule e identità goniometriche*). Ancora una volta dal dato numerico scopriamo che benché gli argomenti e l'ordine siano più o meno gli stessi permangono evidenti differenze espositive.

Per comprendere quanto detto concentriamoci su un esempio specifico. Studiamo come i tre testi definiscono i radianti e come introducono la circonferenza trigonometrica. Per la Francia consideriamo il volume per la classe seconda capitolo 6. In una sola pagina(pag.140) il testo definisce il cerchio trigonometrico:

> `Définition. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O de rayon 1, orienté dans le sens direct c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.`

Poi mette in corrispondenza i numeri della retta reale e quelli della circonferenza unitaria:

> `Propriété. Tout point N d'abscisse x de la droite (IA) vient se superposer ‘‘par enroulement’’ à un point M du cercle trigonométrique. On associe ainsi à chaque nombre réel x un unique point M du cercle.`

Infine definisce la misura in radianti:

> `Définition. Soit x un réel appartenant à l'intervalle` $[0, 2\pi[$`. Lorsque le point N d'abscisse x sur la droite des réels se superpose au point M sur le cercle trigonométrique, on dit que le réel x est la mesure en radiant de l'arc de cercle` $\widehat{IM}$`. Si` $x \in [0;\pi]$`, alors le réel x est aussi la mesure en radian de l'angle` $\widehat{IOM}$`.`

Nella pagina che segue attraverso un esercizio il libro insegna come mettere in corrispondenza i punti del cerchio trigonometrico con i radianti. La definizione del seno e del coseno di un angolo sono date nel paragrafo successivo.

Per l'Inghilterra considero il primo paragrafo del capitolo 9 del volume IB: *Radian measure*. Nella prima pagina il testo definisce il cerchio trigonometrico e la misura in radianti:

> An angle measures the amount of rotations between two straight lines. You are already familiar with measuring angles in degrees, where a full turn measure 360° and that there are two directions (or sense) of rotation; clock and anti-clockwise. It is conventional in mathematics to measure angles anti-clockwise.[...]The measure of 360° for a full turn may seems arbitrary and there are other ways of measuring size of angles. In advanced mathematics, the most useful unit of measuring angles is the radian. This measure relates the size of the angle to the distance moved by a point around a circle. Consider a circle with centre O and radius 1(this is the unit circle), and two points, A and B, on its circumference. As the line OA rotates into position OB, point A moves the distance equal to the length of the arc AB. The measure of the angle AOB in radians is equal to this arc[...].

Insegna poi a passare dalla misura in gradi ai radianti e viceversa(1 pagina di cui mezza di esempi) e generalizza al caso in cui la circonferenza non abbia raggio unitario:

> In our definition of the radian measure we have used the unit circle. However, we can think about a point moving around a circle of any radius. As the line OA rotates into position OB, point A covers the distance equal to the length of the arc AB. The ratio of this arc length l to the circumference of the circle is $\frac{l}{2\pi r}$. The measure of $A\hat{O}B$ in radians is in the same ratio to the full turn, so $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{l}{2\pi r}$. It follows that the measure of the angles in radians is $\theta = \frac{l}{r}$;[...].

Conclude, dopo alcune note, mettendo in corrispondenza numeri reali e punti della circonferenza(2 pagine e mezza di cui 1 di worked examples):

> One advantage of thinking of angles as measuring the amount of rotation around the unit circle is that we can show an angle of any size by marking the corresponding point on the unit circle. We have seen that the convention in mathematics is to measure positive angle anti-clockwise. Another convention is that we start measuring from a point which is on the positive x-axis.[...] We can also represent negative angles(by rotating clockwise) and angles larger than 360° (by rotating through more than a full turn).[...] We can apply this idea to representing numbers; instead of representing numbers by point on a number line, we can represent them by point on a unit circle. To do this, we imagine wrapping the number line around a circle of radius 1, starting by placing zero on the positive x-axis [...], and going anti-clockwise.[...] We can also represent negative number in this way, by wrapping the negative part of the number line clockwise around the circle[...].

Interessanti nel testo sono le quattro note a margine che accompagnano la trattazione: la prima spiega brevemente l'origine del numero 360 per indicare una rotazione completa; la seconda pone una domanda provocatoria:

> There are many different measure of angle. One historical attempt was gradians, which split a right angle into 100 units. Does this meant that the fact you have learnt about angles- ideas such as 180° in a triangle- are purely consequence of definitions and have no link to truth?

la terza introduce l'angolo solido e fa un collegamento tra la circonferenza trigonometrica e la sfera unitaria;l'ultima evidenzia che data la corrispondenza tra numeri della retta e punti della circonferenza, i radianti risultano una misura più "naturale" per gli angoli rispetto ai gradi.

Per l'Italia prendiamo in considerazione il primo paragrafo del primo capitolo del volume IV. Ha una lunghezza di sei pagine ed è suddiviso in sei sotto-paragrafi. Nel primo, *Il concetto di angolo*, dopo aver ricordato la definizione di angolo:

> Consideriamo in un piano due semirette aventi la stessa origine. Si chiama angolo la figura costituita dalle due semirette e da una delle due parti in cui il piano è diviso dalle semirette stesse. L'origine delle semirette è detta vertice dell'angolo; le due semirette si dicono lati dell'angolo;

si fa notare che *d'ora in avanti sarà utile osservare un angolo da un nuovo punto di vista, non "statico" come quello della definizione poc'anzi ricordata, ma "dinamico": sarà utile cioè pensare un angolo come descritto dalla rotazione di un suo lato intorno al vertice.* Nel secondo sotto-paragrafo si richiama il sistema di misura sessagesimale, mentre nel terzo si introduce la misura in radianti:

La misura di un angolo in radianti è la misura dell'arco che esso intercetta sulla circonferenza goniometrica, una volta che l'angolo sia posto in posizione normale.

Il libro insegna poi a convertire i gradi in radianti e viceversa; generalizza la formula per trovare la misura di un angolo in radianti nel caso la circonferenza non sia di raggio unitario:

Per definire la misura di un angolo in radianti, invece della circonferenza di raggio unitario avremmo potuto considerare una qualsiasi circonferenza di raggio r e centro nel vertice dell'angolo. In questo caso la misura in radianti di un angolo, che indicheremo con α, è definita dal seguente rapporto: $\alpha = \frac{l}{r}$ essendo l la misura dell'arco intercettato dall'angolo sulla circonferenza;

utilizza questa formula per trovare l'area di un settore circolare sfruttando le proporzioni. Infine nel paragrafo intitolato *Misura relativa di un angolo e misure di angoli maggiori dell'angolo giro*(2 pagine) il libro fa notare che la nuova *interpretazione "dinamica"* di angolo pone due problemi: il primo è quello di definire una *misura relativa* di angolo che tenga conto del verso di rotazione; il secondo è quello di *estendere il concetto di angolo considerando angoli maggiori di un angolo giro*. Vediamo a titolo di esempio come il testo risolve la seconda questione posta.

Per introdurre angoli maggiori di un angolo giro fissiamo l'attenzione su un angolo (orientato) in cui il primo lato è la semiretta a e il secondo lato la semiretta b,descritto dalla rotazione in senso antiorario della semiretta a. Sia α la misura in gradi dell'angolo. Se supponiamo che la semiretta , nella sua rotazione in senso antiorario, non si fermi la prima volta che raggiunge b ma percorra un giro completo fino a ritornare nuovamente in b, si genera ancora un angolo in cui il primo lato è a e il secondo lato è b, ma a questo nuovo angolo dovremo assegnare una misura che tenga conto del giro in più fatto. É naturale assegnare a tale angolo la misura (in gradi) di α+$360°$, dove il segno positivo tiene conto del fatto che il giro in più è stato effettuato in senso antiorario. Se la semiretta a ruotasse invece in senso orario fino a raggiungere b, allora verrebbe descritto un angolo la cui misura, in gradi, sarebbe: $\alpha - 360°$, mentre la misura relativa è l'opposto perché tiene conto del fatto che la rotazione della semiretta a è avvenuta in senso orario, cioè nel verso negativo.[...] Gli infiniti angoli che così si ottengono possono dunque essere rappresentati in forma sintetica con la scrittura: $\alpha + k360°$ al variare d k in $\mathbf{Z}$[...].

Dagli esempi riportati appare evidente quanto detto sopra: le trattazioni sono simili, ma lo stile e le metodologie dei testi fanno sì che lo stesso concetto arrivi al lettore in tre modi differenti: sintetico, pragmatico, formale.

→ Le trasformazioni geometriche

ITALIA
I-19:Isometrie (29+26)
Trasformazioni geometriche
Isometrie
Simmetrie assiali
Simmetrie centrali
Traslazioni
Rotazioni
Dim. mediante isometrie
Composizione di trasformazioni e classificazione delle isometrie
Isometrie nel piano cartesiano
II-16:Omotetie e similitudini (8+10)
Omotetie
Omotetie nel piano cartesiano
Dalle omotetie alle similitudini
III-6:Simmetrie,traslazioni e dilatazioni nel piano cartesiano (21+19)
Simmetrie centrali
Simmetrie assiali
Traslazioni
Dilatazioni e omotetie
Le trasformazioni e i grafici
IV-6:Rotazioni, similitudini e affinità (23+27)
Rotazioni
App.delle rotazioni alle coniche
Affinità
Sguardo d'insieme sulle trasf.

INGHILTERRA
IGCSE 19:Symmetry and loci (21)
Symmetry in two dimensions
Symmetry in three dimensions
Symmetry properties of circles
Angle relationships in circles
Locus
IGCSE 23:Transformation and matrices (45)
Simple plane transformations
Vectors
Further transformations
Matrices,matrix transformation
Matrices and transformations

FRANCIA
Collège
Classe VI
G3: Simmetria assiale
G5: Assi di simmetria
Classe V
G1: Simmetria centrale

Il testo francese limita la trattazione delle trasformazioni geometriche al Collège presentando le simmetrie da un punto di vista elementare e intuitivo.

Completamente differente è l'approccio italiano. Il testo italiano dedica quattro capitoli allo studio delle trasformazioni, uno per ogni anno(dal I al IV). Dapprima si presentano le trasformazioni sfruttando i mezzi della geometria euclidea; poi si scrivono queste sotto forma di equazioni nel piano cartesiano; infine nel quarto anno si utilizzano anche gli strumenti della trigonometria per scrivere le equazioni delle rotazioni. Questi quattro capitoli risultano piuttosto elaborati e articolati. La trattazione è tutt'altro che elementare. Ancora una volta si sceglie un approccio formale e ciò comporta l'assumere come veri diversi teoremi e proposizioni.

Un ruolo intermedio è svolto in questo caso dal testo inglese. Esso dedica due capitoli alle trasformazioni geometriche. Dapprima adotta un approccio sperimentale e grafico; poi ricava attraverso l'uso delle matrici le equazioni di una trasformazione. Manca la classificazione e caratterizzazione rigorosa presente nel testo italiano. L'approccio rimane piuttosto informale e si fa ampio uso dei *Worked examples.*

Un confronto diretto risulterebbe "vuoto" ed inconsistente. Come confrontare 163 pagine di trattazione formale con 66 di spiegazioni pratiche ed intuitive ed un libro di testo pensato per ragazzi di scuola media? Sicuramente non ha alcun senso considerare il testo francese poiché presenta solo le simmetrie usando un approccio pratico e sfruttando le costruzioni. Per rendersi conto invece delle profonde differenze che intercorrono tra il testo inglese e quello italiano riporto due estratti di questa trattazione. Quello tratto dal testo inglese spiega, dopo aver dato un esempio, come utilizzare le matrici per scrivere una trasformazione:

```
This principle can be used to describe some of the transformations you have worked with so far. For
the following transformations:
1.Select the points (1,0) and (0,1).
2.Find the images of these points under the given transformation.
3.Write down the position vectors of these images.
4.The position vector of the image of the first point becomes the first column and the position vector
of the second point is the second column of the required matrix.
```

Il testo prosegue dunque applicando questa regola per trovare la matrice che descrive una riflessione, una rotazione(90°), un ingrandimento, uno scorrimento e un allungamento. Questa parte conclude lo studio delle trasformazioni nel testo inglese.

In analogia presentiamo invece come si conclude lo studio delle trasformazioni nel testo italiano. A tal proposito consideriamo l'ultimo paragrafo del capitolo 6 del volume IV, dove, dopo aver caratterizzato(mediante teoremi) similitudini ed isometrie nell'insieme delle affinità, si presenta uno specchietto conclusivo per caratterizzare le isometrie:

```
1.Si calcola il determinate dell'isometria, in modo da stabilire se è diretta o inversa;
2.se il determinante dell'isometria è positivo, allora l'isometria è diretta, quindi può essere una
traslazione o una rotazione: è immediato riconoscere dalle equazioni stesse se si tratta di una traslazione,
in caso contrario l'isometria è una rotazione;
3. se il determinante dell'isometria è negativo, l'isometria è inversa, quindi può essere una simmetria
assiale o una glisso-simmetria; per capire di quale dei due casi si tratta, basta determinare i punti
uniti dell'isometria: se l'isometria ammette una retta r costituita da punti uniti è una simmetria
assiale avente come asse la retta r, se invece non ammette punti uniti è una glisso-simmetria.
```

Benché relativi ad argomenti differenti entrambi gli estratti sono posti a conclusione della trattazione delle trasformazioni geometriche. Essi sottolineano ancora una volta le differenze che intercorrono tra il testo inglese e quello italiano. Uno è conciso, essenziale e propone la regola in forma chiara e diretta. L'altro è decisamente più formale, rigoroso e "teorico". Se da una parte si privilegia la concretezza dall'altra lo studio è rivolto alla formalizzazione teorica dei fatti. Lo scopo è di raccogliere e classificare le trasformazioni geometriche secondo modelli matematici.

• Matematica senza frontiere?

Quale conclusione trarre dalle considerazioni fino ad ora esposte?

La principale è che il confronto porta a concludere che manca ancora uno standard europeo nell'insegnamento della matematica. I confini tra nazioni risultano ben tracciati. All'interno di una stessa nazione i testi risultano tra loro praticamente equivalenti, ma abbiamo visto che non si può fare la stessa affermazione se si prendono testi di stati diversi. Mi sarei aspettata di riscontrare differenze espositive, metodologiche e di linguaggio dettate dalle diverse tradizioni scolastiche, ho dovuto invece prendere atto che intercorrono cambiamenti anche a livello contenutistico. Nonostante le numerose riforme non si è quindi riusciti a raggiungere uno standard per l'insegnamento della matematica in Europa ed in particolare è proprio il programma italiano quello che si scosta maggiormente da quelli internazionali.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Professor Franco Magri dell'Università di Milano Bicocca per avermi guidato e accompagnato con grande dedizione e pazienza sia durante la tesi che in questo lavoro di ricerca; per l'aiuto, l'incoraggiamento e la fiducia dimostratami in questi due anni di lavoro. Ringrazio la Professoressa AnnaMaria Gilberti per avermi concesso l'occasione di partecipare e prendere parte al convegno internazionale di Matematica Senza Frontiere 2016; per l'interesse e la disponibilità dimostratomi nei confronti del mio lavoro di ricerca. Infine un grazie a coloro che mi hanno fornito i testi e le informazioni necessarie. Nello specifico: Anna Magni, Claudia Placidi (IB Coordinator Collegio Pio X), James Gavin (European Sales Representative,International Education,Cambridge University Press), Adriano Tedesco (Educational Advisor,Oxford University Press), Stéphane Luciani (Directeur éditorial Sciences et Parascolaire Lycées), Marie-Thérèse Barletta (Déléguée Pédagogique Hachette FLE).

• Bibliografia

Qui di seguito sono elencati i libri di testo consultati, alcuni indirizzi di istituzioni o scuole italiane e straniere che fanno riferimento al programma internazionale ed infine cinque testi che contengono considerazioni generali sull'insegnamento della geometria e della geometria euclidea nelle scuole superiori.

•Testi consultati:

1. L. Sasso *La matematica a colori,EDIZIONE BLU*, Petrini (Volumi 1,2)
2. P. Baroncini, R. Manfredi *MultiMath.blu*, Ghisetti e Corvi (Volumi 1,2)
3. M. Bergamini, G. Barozzi *Matematica multimediale blu*, Zanichelli (Volumi 1,2)
4. M. Andreini, R. Manara, F. Prestipino, I. Saporiti *Pensare e fare matematica*, Etas (Algebra 1, Algebra 2,Geometria)
5. L. Sasso *Nuova matematica a colori,EDIZIONE BLU*, Petrini (Volumi 3,4,5)
6. P. Baroncini, R. Manfredi, I. Fragni *Lineamenti.Math Blu Edizione Riforma*, Ghisetti e Corvi (Volumi 3,4,5)
7. M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi *Matematica.blu 2.0*, Zanichelli (Volumi 3,4,5)
8. M. Andreini, R. Manara, F. Prestipino, I. Saporiti *Pensare e fare matematica*, Etas (Volumi 1,2,3)
9. K. Morrison, N. Hamshaw *Cambridge IGCSE.Mathematics.Core and Extended Coursebook*, Cambridge university press
10. S. Pemberton *Essential Mathematics for Cambridge IGCSE® Student Book*, Oxford university press

11. P. Fannon, V. Kadelburg, B. Woolley, S. Ward *Mathematics Higher Level for the Ib diploma*, Cambridge university press

12. J. Harcet, L. Heinrichs, P. Mariz Seiler, M. Torres Skoumal *Mathematics higher level*, Oxford university press

13. P. Fannon, V. Kadelburg, B. Woolley, S. Ward *Mathematics Higher Level Topic 7: Statistics and probability for the IB diploma*, Cambridge university press

14. P. Fannon, V. Kadelburg, B. Woolley, S. Ward *Mathematics Higher Level Topic 8: Sets, Relations and Groups for the IB diploma*, Cambridge university press

15. P. Fannon, V. Kadelburg, B. Woolley, S. Ward *Mathematics Higher Level Topic 9: Calculus for the IB diploma*, Cambridge university press

16. P. Fannon, V. Kadelburg, B. Woolley, S. Ward *Mathematics Higher Level Topic 10: Discrete Mathematics for the IB diploma*, Cambridge university press

17. *Sésamath: Le manuel* 6^e

18. *Sésamath: Le manuel* 5^e *et ses compléments numériques*

19. *Sésamath: Le manuel* 4^e *avec ses compléments numériques*

20. *Sésamath: Le manuel* 3^e *avec ses compléments numériques*

21. R. Barra, J.M. Barros, P. Bénizeau, K. Liorit, J. Morin, D. Nivaud, V. Ricomet,*TransMath* 2^{de}, Nathan

22. R. Barra, J.M. Barros, P. Bénizeau, J. Morin,*TransMath* $1^{re}S$, Nathan

23. J.M. Barros, P. Bénizeau, J. Morin, S. Aimani,L.M. Bonneval, J.B. Devynck, P. Yvonnet *TransMath* $T^{erm}S$, Nathan,

24. J.P. Beltramone, F.Giton, J. Labrosse, C. Merdy, J. Silhol, A. Truchan,*Maths Déclic* 2^{de}, Hachette éducation

25. J.P. Beltramone, V. Brun, J. Labrosse, C. Merdy, P. Rousseau, O. Sidokpohou, C. Talamoni, A. Truchan ,*Déclic mathématiques* $1^{re}S$, Hachette éducation

26. J.P. Beltramone, V. Brun, J. Labrosse, C. Merdy, O. Sidokpohou, C. Talamoni, A. Truchan,*Déclic mathématiques* T_S, Hachette éducation

- Riferimenti al programma internazionale:

27. www.ibo.org

28. www.cie.org.uk

29. www.internationalschoolofeurope.it

30. www.lsmi.it

31. www.fondazionecollegiopiox.org

32. www.rosey.ch

- Riflessioni critiche sull'insegnamento della geometria:

33. *On the Mathematical Curriculum of the High School*, The American Mathematical Monthly,Vol.69, No.3(Mar.,1962),pp.189-193.

34. F. Acerbi, *Euclide tutte le opere*, Bompiani, 2007

35. Richard Fitzpatrick, *Euclid's elements of geometry.*

36. F.Enriques, *Prefazione a: Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, Stock, Roma, 1925.

37. Jean Dieudonné, *Algebra lineare e geometria elementare*; Milano,Feltrinelli.

I dati relati relativi al confronto sull'insegnamento della geometria sono tratti dalla mia tesi *Studio comparato dei programmi di matematica nei licei di Italia, Francia ed Inghilterra*, 2015, Università di Milano Bicocca, Dipartimento di Matematica e applicazioni.