

Giochi e Problemi in Matematica

Rémy Jost , inspecteur général honoraire, France

Seminario « Matematica senza Frontiere »

Monza, giovedì 20 novembre 2014

Quattro parti quasi indipendenti :

I. Giochi e competizioni

II. Educazione in Finlandia e in Cina

III. Risoluzione di problemi

Automatismi

**IV. Successo degli allievi e
dell'insegnamento**

I. Giochi e competizioni a scuola

Giochi a scuola

Qualche tappa storica

- Nel medioevo: Carlo Magno incoraggia i giochi
- Fino all'inizio del ventesimo secolo i giochi d'azzardo sono sospettati di essere «diabolici»
- Durante il ventesimo secolo Montessori et Freinet introducono il gioco in classe
- Dal 1968 cominciano a fiorire alcune competizioni matematiche.

E' il tempo della primavera dei giochi!

I. Giochi e competizioni a scuola

Giochi a scuola

I vantaggi dei giochi a scuola

Per gli allievi:

- *sviluppo sociale e della propria personalità*
- *memorizzazione, apprendimento di regole, di strategie*
- *curiosità, motivazione, voglia di «cercare».*

Per i docenti:

- *Riflessione pedagogica*

Un paradosso: s'impara giocando ed è cosa seria!

I. Giochi e competizioni a scuola

Giochi alla scuola dell'infanzia

Il gioco delle 7 famiglie

(7 famiglie di 6 persone: due nonni, due genitori e due bambini – 42 carte)

I bambini imparanno

- i numeri fino a 7 (le famiglie numerate da 1 a 7)
- particolarmente la nozione del cardinale 6
- la nozione di classificazione(per famiglie)
- la rappresentazione in tavola cartesiana(6x7)
- i complementi: io non ho che 4 membri della famiglia,...?
- I confronti: io ho 3 famiglie, tu ne hai 4...

I. Giochi e competizioni a scuola

Giochi alla scuola dell'infanzia

Un gioco di carte per la « battaglia »

(2 giocatori con 32 carte: ogni giocatore mette una carta sul tavolo, la carta più alta vince e il giocatore vincente la prende e la mette nel suo mazzetto. Se due carte sono pari, allora, c'è battaglia tra i due giocatori che scoprono due carte del loro mazzetto senza guardare la carta di mezzo. La carta più alta vince e ciascuno rimette 2 carte nel proprio mazzetto....e si ricomincia. Alla fine perde chi non ha più carte)

Per i bambini:

- confronto tra i valori delle carte, lettura dei numeri

Per il maestro:

- osservare e analizzare i metodi utilizzati
- far comprendere il legame tra questi metodi
- portare la classe intera a un primo livello di astrazione.

I. Giochi e competizioni a scuola

Giochi al collège (11-15 anni)

Concorsi semplici e giochi

in classe utilizzare dei giochi o dei concorsi semplici per coinvolgere l'allievo a impegnarsi in un processo dinamico d'apprendimento motivante.

Soprattutto il calcolo mentale

ogni allievo deve essere valorizzato per il suo progresso.

Così entra nel gioco.... et contemporaneamente impara.

I. Giochi e competizioni a scuola

Giochi dalla scuola primaria al liceo



MSF JUNIOR 2014

Che fila! Il poliziotto Cruchon dall'alto del suo elicottero osserva un ingorgo sull'autostrada. Stima 1 km la lunghezza dell'ingorgo. "Cruchon", qui la base, quanti veicoli ci sono in questo ingorgo secondo te?"

Se tu fossi il poliziotto quale numero indicheresti? Spiega il tuo ragionamento.

Capacità : ragionare logicamente, comunicare per iscritto utilizzando un linguaggio matematico opportuno, effettuare a mano dei calcoli semplici, determinare l'ordine di grandezza, controllare la vera somiglianza di un risultato.

L'allievo deve fare: stimare il numero di veicoli coinvolti in un ingorgo di 1 km, formulare deduzioni, ragionare logicamente, calcolare, ricavare dei dati, elaborarli, modellizzare,....

L'allievo impara a « cercare » con altri compagni, a dibattere, a spiegare, a relazionare...

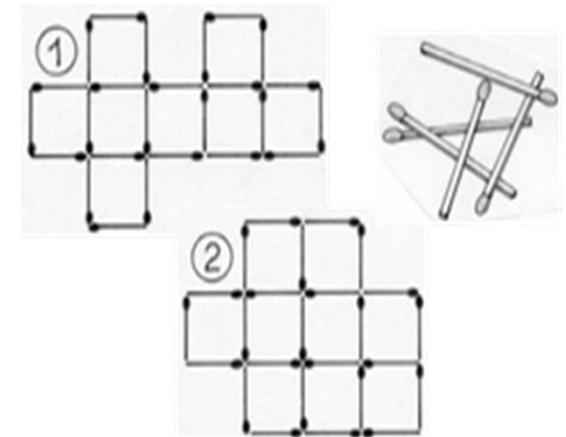
I. Giochi e competizioni a scuola

Giochi dalla scuola primaria al liceo

MSF 2010 Quadrati di fiammiferi

Se si dispongono 25 fiammiferi su un piano, si possono formare 8 quadrati di lato unitario se si dispongono come in figura 1 e 9 quadrati di lato unitario se si dispongono come in figura 2.

Costruire il maggior numero possibile di quadrati unitari con 100 fiammiferi e presentare il disegno della soluzione individuata.



Capacità: utilizzare uno schema, « cercare la soluzione migliore ».

L'allievo deve fare: manipolazione, numerazione e computo, ottimizzazione, **tentativi, dibattito con i compagni.**

Sviluppo possibile: si può porre il problema con 1000 fiammiferi.

I. Giochi e competizioni a scuola

Creare problemi per le competizioni

Un buon problema per una competizione?

- Stupefacente, fuori dal comune, accattivante
- Enunciato facile da comprendere, divertente
- Aperto, poco guidato
- Domande chiare
- Diverso dagli esercizi applicativi delle lezioni
- Possibilmente con più di un metodo di risoluzione
- Testato più volte nel gruppo d'ideazione, riletto da persona esterna al gruppo, provato con un gruppo di allievi.

I. Giochi e competizioni a scuola

Proporre problemi per le competizioni

Alcuni obiettivi:

- il piacere di « cercare » assieme
- la traduzione di una situazione in un problema da risolvere
- la ricaduta sulla matematica di un'immagine positiva
- Il contributo per uno sviluppo sia sul piano sociale sia su quello personale degli allievi.

I. Giochi e competizioni a scuola

Proporre problemi per le competizioni

• **Condizioni e interesse per il gruppo di studenti:**

accettazione della competizione per elaborare strategie di ricerca, di dibattito

• **Condizioni e compito del docente**

« **Allenatore** »: impara a far fronte a delle domande impreviste,

a facilitare il lavoro di gruppo, a tacere, a spiegare con modalità diverse.

« **Regolatore** »: successivamente, riprende ciò che è stato elaborato in classe, ciò che è stato appreso; si sofferma su ciò che deve essere ricordato!

II. Sguardo sull'educazione in Finlandia



II. Sguardo sull'educazione in Finlandia

Valori sviluppati a scuola: solidarietà, senso civico, obbedienza, lavoro, responsabilità

- bocciatura inesistente
- nessun timore di sbagliare
- a fronte di un compito perso/errato, diritto di rifarlo.

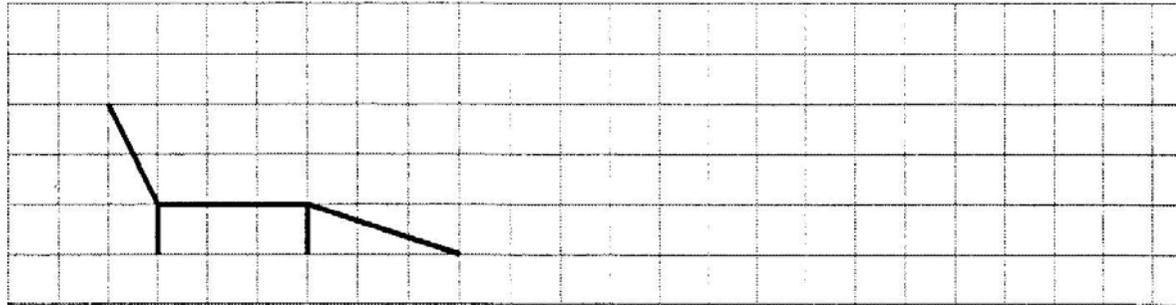
In matematica: lezione preparata a casa; esercizi tipo PISA; lavoro di gruppo in classe.

I professori

- almeno tre anni consecutivi con gli allievi
- formazione nella loro scuola
- creazione di giochi.

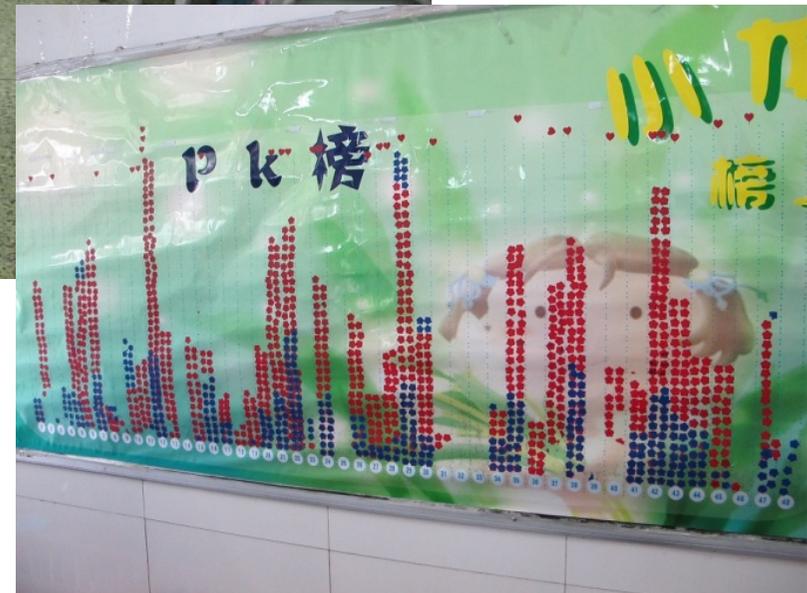
II. Un esempio di quesito classe (11 – 13 anni)

Piirrä aurinkotuoli suurennettuna mittakaavassa 2:1.



Disegna la sedia a sdraio riportandola in scala 2:1

II. Sguardo sull'educazione in Cina



II. Sguardo sull'educazione in Cina



II. Sguardo sull'educazione in Cina

- **Valori sviluppati a scuola:** solidarietà, senso civico, obbedienza, lavoro, memorizzazione;
- **Ogni giorno:** pulizia degli ambienti, canto patriottico, saluto ai docenti, relax e ginnastica;
- **Classi** da 40 a 50 allievi;
- **Insegnamenti obbligatori:** cinese, matematica e inglese.
- **In matematica:** ogni giorno 10 minuti di lavoro di gruppo, compiti su quaderno, correzioni, preparazione delle lezioni.
- **I docenti sono responsabili del successo di ogni allievo.** Bocciature rare, studenti molto supportati durante la lezione e dopo.
- **Le scuole sono classificate** in base alle prove degli allievi e ai concorsi di pedagogia.

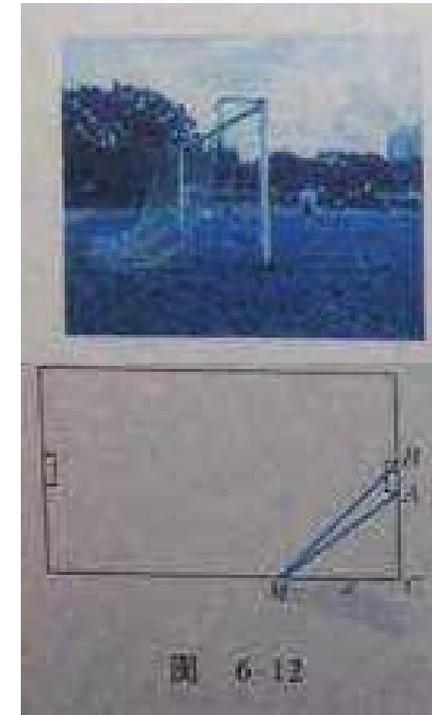
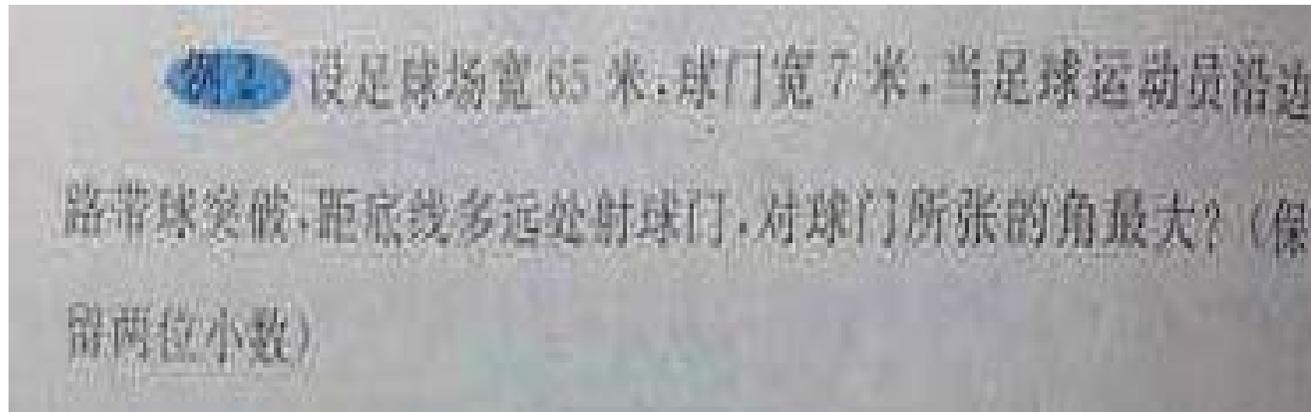
II. Sguardo sull'educazione in Cina



II. Esercizi in Cina

Tiro in porta

(15 – 16 anni)



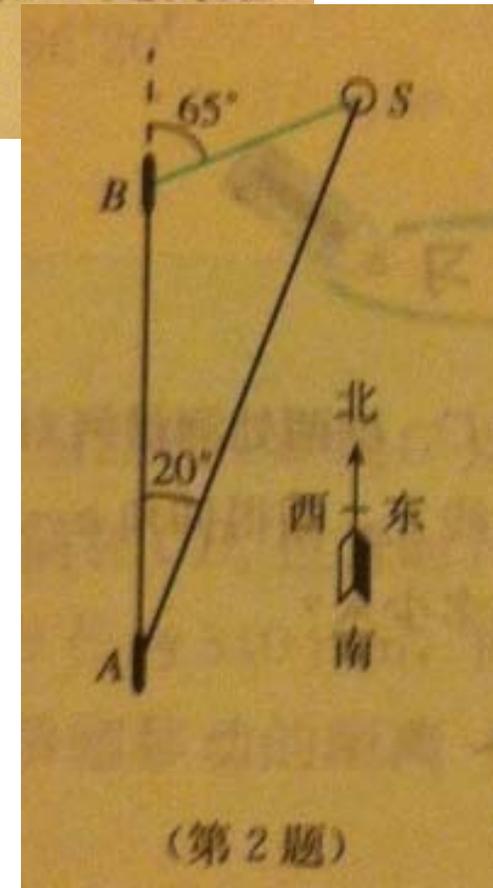
Considerato un campo da calcio di 65 m di larghezza, la porta è larga 7m.

Per lanciare più facilmente il pallone in porta il giocatore deve posizionarsi lungo la lunghezza del campo; cioè, in modo che l'angolo AMB sia il più grande possibile?

II. Esercizi in Cina

Calcolo d'una distanza in mare

如图，一艘船以 32.2 n mile/h 的速度向正北航行，在 A 处看灯塔 S 在船的北偏东 20° ， 30 min 后航行到 B 处，在 B 处看灯塔 S 在船的北偏东 65° 方向上，求灯塔 S 和 B 处的距离（精确到 0.1 n mile ）。



II. Attività culturale e storica in Cina

Misura del raggio della terra per triangolazione

阅读材料

人们早期怎样测量地球的半径?

我们知道, 地球的形状近似一个球, 那么怎样测出它的半径呢? 下面我们介绍一种人们早期近似测量地球半径的方法.

如图 1, 设圆周长为 C , 半径为 R , 圆上 M 、 N 两地间的弧长为 l , 对应的圆心角为 n° .

因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C=2\pi R$, 所以 1° 的圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi R}{360}$, 即 $\frac{\pi R}{180}$. 于是半径为 R 的圆中, n° 的圆心角所对的弧长 l 为

$$l = \frac{n\pi R}{180}$$

$$\therefore R = \frac{180l}{\pi n}$$

在实际测量地球半径时, M 、 N 两地常选在同一条子午线上, 然后用天文方法测出 M 、 N 两地的纬度, 即可算出 n° . 当 M 、 N 两地相距很远时, 常采用布设三角网的方法, 算出 MN , 即 l 的长. 如图 2, 在 M 、 N 两地间布设三角点, 构成 $\triangle AMB$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle EDN$ 等. 用经纬仪可测出这些三角形的各个角的度数, 再量出 M 点附近的那条基线 MA 的长, 即可算出 MN 的长.

具体算法如下:

在 $\triangle MAB$ 中, 由于它的各个角已测出, AM 的长也量出, 故由正弦定理得

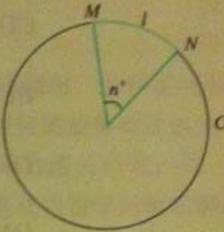


图 1

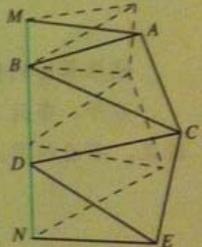


图 2

$$MB = \frac{AM \sin MAB}{\sin ABM}$$

$$AB = \frac{AM \sin AMB}{\sin ABM}$$

同理可求得

$$BC = \frac{AB \sin CAB}{\sin ACB}$$

$$CD = \frac{BC \sin CBD}{\sin BDC}$$

$$BD = \frac{BC \sin BCD}{\sin BDC}$$

$$DE = \frac{CD \sin ECD}{\sin CED}$$

$$DN = \frac{DE \sin DEN}{\sin DNE}$$

$\therefore MN = MB + BD + DN$.

法国的皮卡尔 (Picard. J. 1620 年~1682 年) 于 1669 年~1671 年间, 率领他的测量队首次测出了巴黎和亚眠之间的子午线的长, 求得子午线 1° 的长约为 111.28 km, 这样他推算出地球的半径为

$$R = \frac{180 \times 111.28}{3.1416 \times 1} \approx 6376 \text{ (km)}$$

他推算出的值与现在公认的地球半径 6371 km 非常接近.

另外, 布设三角网有多种方法 (如图 2 中的虚线), 要根据实际情况, 布设的网点越少越好.

II. Sguardo sull'educazione in Cina



II. Sguardo sull'educazione in Cina



II. Un esempio di quesito

culture a confronto

(ricerca con quindicenni a cura F. Spagnolo 2010)



“Un cavallo bianco non è un cavallo”.
Questa proposizione possiamo
dichiararla vera o falsa?

Nella logica Aristotelica questa proposizione è falsa in quanto l'insieme dei cavalli bianchi è un sotto insieme dei cavalli.

*La parola “cavallo” denota una forma, “bianco” denota un colore. Ciò che denota la forma non denota il colore. Quindi **nella logica cinese classica** un cavallo bianco non è un cavallo (in quanto tale). I due universali “cavallo” e “bianco” vengono percepiti separatamente.*

III. Risoluzione di problemi

il parere di matematici illustri

Henri Poincaré(1854-1912) e Hadamard (1865-63)

preparazione – incubazione – illuminazione - verifica

Georges Polya (1887-1985)

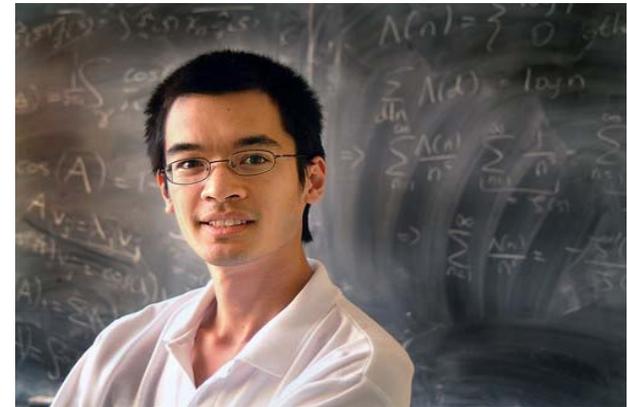
comprensione del problema – concezione di un piano –
attuazione di un piano – esame della soluzione

Terence Tao, medaglia Fields 2006

Come spirito: timoroso e coraggioso,
scettico e entusiasta, felice e fiducioso

Nello stesso tempo: utilizzare i metodi
memorizzati e «cercare»

La risoluzione: riflessione, tentativi e
congetture, riformulazione e ragionamento.



III. Risoluzione di problemi *il parere didattico*

Messa in atto di 4 gruppi di competenze:

- ricercare, estrarre e organizzare l'informazione utile;
- scegliere e seguire un metodo di risoluzione, ad es. calcolare, misurare.. ;
- ragionare, argomentare, praticare un percorso sperimentale, validare un risultato;
- presentare il percorso seguito, i risultati ottenuti, comunicare.

III. Risoluzione di problemi

parere di esperti della didattica sull'insegnamento per problemi

Da più di 30 anni vi sono «parole d'ordine» del tipo: *«insegnare per problemi»*.

• **Jean Julio** si è posto la questione dell'efficacia di un insegnamento basato sulla risoluzione di problemi. Dal 2002 suggerisce di «puntare su apprendimenti specifici, basati su problemi analoghi».

• **Alain Mercier et Bernard Sarrazy** nel 2007: «fare utilizzare agli allievi problemi con lo scopo della costruzione di una nozione matematica è meno produttivo che un insegnamento tradizionale, a causa della complessità dei problemi posti, delle competenze degli insegnanti, delle differenze tra gli allievi e della formalizzazione differita.

III. Risoluzione di problemi e automatismi

L'attività matematica è basata sulla risoluzione di **problemi**,

ma per pensare strategie di ricerca produttiva, gli allievi devono potersi appoggiare su **conoscenze padroneggiate**, su **ragionamenti memorizzati**.

Così la lezione di matematica diventa un luogo di creatività e di formazione dello spirito.

III. esempi di automatismi

Nel calcolo

- La padronanza del significato delle 4 operazioni; ad es. per scegliere l'operazione opportuna in un calcolo;
- la conoscenza di procedure di calcolo mentale rapide ed efficaci; ad es. 210×5
- Le percentuali e le proporzioni: disporre di un metodo produttivo per applicare il calcolo di una percentuale o calcolare la frazione di una quantità data; ad es. «l'80% di... » equivale a moltiplicare per 0,8.. o è pari a $\frac{1}{5}$ di meno di... o è pari agli $\frac{8}{10}$ di...; «i $\frac{3}{4}$ di... » equivalgono a ...

III esempi di automatismi

In geometria

- una buona memorizzazione delle proprietà geometriche di alcune figure di base come il quadrato, il rettangolo, il triangolo isoscele...
- una buona abilità nella costruzione geometrica di queste figure con strumenti di disegno, con software
- Esempio del rettangolo: avere in memoria e, immediatamente disponibile, una caratterizzazione tramite le diagonali o gli angoli retti, il calcolo dell'area, del perimetro...

III. Risoluzione di problemi e automatismi

Gli automatismi?

Che cosa sono?

- **Metodi ben memorizzati, tecniche e ragionamenti elementari**, messi in opera per la risoluzione di numerosi problemi.
- Né «ricette», né «trucchi» sortiti al momento della necessità!
- Apprendimenti permanenti si sviluppano, sotto la guida del docente, memorizzando progressivamente alcuni ragionamenti minori/limitati.

III. Risoluzione di problemi e automatismi

Gli automatismi? A quale fine?

Effetti:

- In situazione di ricerca **sono disponibili nella memoria di lavoro** e facilitano l'assunzione d'iniziativa per dei ragionamenti più complessi.
- **Gli allievi sono più autonomi**: osano più facilmente tentare dei percorsi senza essere disturbati da buchi di memoria.

IV. Successo degli allievi e dell'insegnamento

«Ciò che non è insegnato, non è appreso»

- In matematica, il docente deve guidare la costruzione dei saperi o dei saper fare riservando dei tempi per l'apprendimento e reinvestendolo.
- Il docente deve padroneggiare i saperi insegnati e conoscere le competenze da far esercitare.
- **L'insegnamento per problemi è stato promosso trascurando l'esigenza d'insegnare conoscenze e metodi di base e di memorizzare di risultati utili.**

IV. Successo degli allievi: principi e riferimenti

- **L'allievo per risolvere i problemi deve poter contare su conoscenze solide e su automatismi efficaci.**
- **Il docente che fa sempre «scoprire» tutto ai suoi allievi, di fatto si rivolge a quelli che hanno meno bisogno di lui per riuscire.**
- **Per imparare, occorre ricevere insegnamento: è vero per tutti gli allievi, **ma**, in particolare, per quelli più lenti, meno a loro agio con l'astrazione o che hanno difficoltà.**

IV. Successo dell'insegnamento: principi e riferimenti

- La qualità dell'insegnamento della matematica si basa su situazioni stimolanti e progressive.**
- Il docente è capace di modificare, diversificare e adattare i metodi d'insegnamento.**
- Il calcolo mentale è insegnato, applicato e approfondito ogni giorno.**
- L'osservazione degli errori commessi in situazione è un atto essenziale per il professore.**
- A fronte di difficoltà maggiori in matematica, il docente deve farsi carico dell'allievo in classe e, se necessario, fuori della classe.**

A conclusione

Ogni docente è responsabile del successo di ciascuno dei suoi allievi.

Alcuni punti fermi:

«Partecipare a competizioni matematiche permette d'imparare in modo diverso»

«Nella formazione matematica degli allievi la risoluzione di problemi e la padronanza degli automatismi sono complementari»

«Ciò che non è insegnato non è appreso!»