“Matematica e scacchi”

Patrizia Previtali

Livello d'età:

Classi seconda e terza superiore

Competenze in esercizio e nuclei tematici:

utilizzare strumenti di rappresentazione per la modellizzazione e la risoluzione di problemi.

Livello

- Alfabetizzazione e sviluppo
- Recupero

Esiti

- Superamento del senso di disorientamento di fronte a problemi non standard
- Esercizio di procedure strategiche
- Sviluppo della capacità di individuare modelli

Materiale

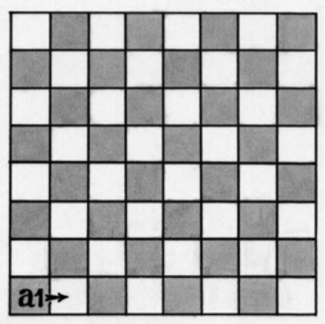
- Schede di lavoro

Traccia delle fasi didattiche

Il seguente percorso si sviluppa attraverso una collezione di problemi di differente livello di difficoltà, utilizzabili come materiali per lavori di gruppo, sviluppati sulla scacchiera e risolubili attraverso costruzione di grafi, tabelle o modellizzabili con il concetto di funzione. Dal punto di vista tematico molte di queste situazioni sono riconducibili al calcolo combinatorio, tradizionalmente inteso.
Ai problemi stimolo seguono una scheda-guida per imparare a risolvere quesiti-base prima di cimentarsi con enigmi “più difficili” e una scheda di quesiti simili a quelli stimolo. Per chi vuole, infine, ci sono i problemi tratti dalla raccolta delle Olimpiadi della matematica.

Problemi stimolo

SP071112 Andata e ritorno



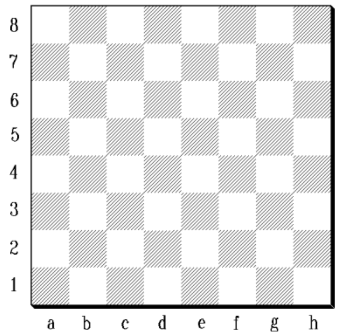
Nella scacchiera in figura si vuole tracciare un percorso chiuso spostandosi di casella in casella partendo dalla casella a1 e ritornando lì. Il tracciato deve passare una e una sola volta su ciascuna delle altre caselle della scacchiera. Si passa da una casella all'altra per un lato comune, ma non in diagonale.

Tracciate un tale percorso su una scacchiera 8x8.

Eseguendo delle prove su differenti scacchiere quadrate, più grandi o più piccole, si osserva che non è sempre possibile tracciare tale percorso.

Esiste un tale percorso per una scacchiera 17 x 17? Giustificate la risposta.

Questo problema potrebbe essere chiamato "il percorso del re" (o della torre) ed è un esempio di cammino hamiltoniano trattato dalla teoria dei grafi.

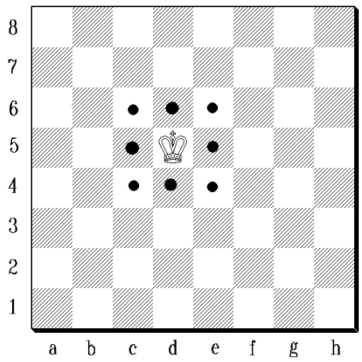


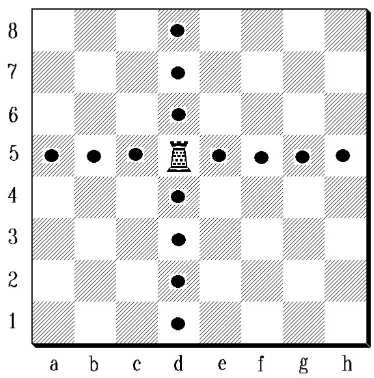
Nel gioco degli scacchi le case della scacchiera vengono individuate, secondo la notazione scientifica internazionale, come elementi del prodotto cartesiano dell'insieme A={a,b,c,d,e,f,g,h} e dell'insieme B={1,2,3,4,5,6,7,8} . Le colonne (verticali) sono indicate con le lettere a,b,c,d,e,f,g,h (individuate a partire da sinistra verso destra, come mostrato in figura, nel campo del bianco) e le traverse (righe, orizzontali) con i numeri da 1 a 8. Ad esempio la casella che occupa la prima colonna e la prima traversa è indicata con a1, quella all'incrocio della terza colonna e della quarta traversa con c4 e così via.

Le case sono $8^2=64$.

Più in generale se $A_1=A_2=......=A_n=A$ ed A è un insieme di a elementi, il prodotto cartesiano AxAx...xA, indicato con A^n e composto con n fattori, è costituito da a^n elementi.

Il re può spostarsi di una sola casa in qualunque direzione: in verticale, in orizzontale o in diagonale.





Sulla scacchiera ordinaria la torre può muoversi sia lungo una colonna "in verticale" che lungo una riga o “traversa” in orizzontale e si sposta di quante case vuole dalla sua posizione di partenza. Si può anche pensare che la torre controlla tutte le case della riga e della colonna della sua casa di partenza.

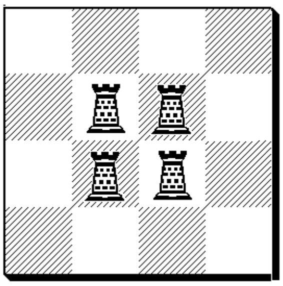
Le torri indipendenti

Disponete tre torri distinguibili (ad esempio etichettate in modo differente) su una scacchiera 3x3 in modo che non si catturino a vicenda.

In quanti modi è possibile disporre le torri per rispondere al quesito posto?

Le torri dominanti

In una scacchiera 4x4 sono sufficienti quattro torri per controllare o “dominare” tutta la scacchiera. Una casa si dice dominata da un pezzo se risulta occupata o controllata dal pezzo.



Disponete otto torri su una scacchiera 8x8 in modo da dominare tutte le 64 case.
In quanti modi differenti è possibile disporle sulla scacchiera per dominarla? Motivate la risposta.

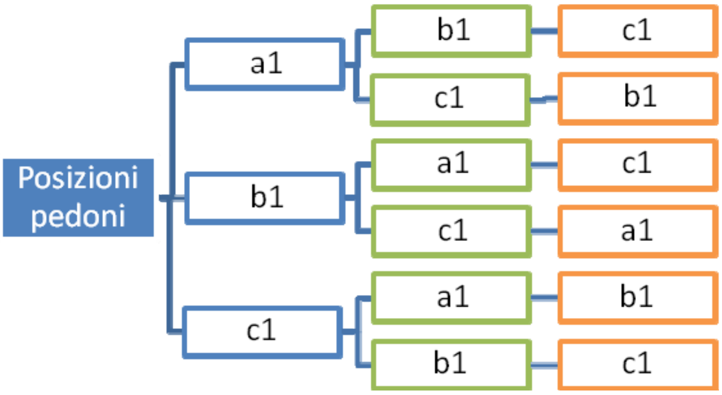
Mentre il primo problema stimolo è risolubile per tentativi ed errori, gli altri due necessitano della conoscenza di metodi che prepariamo con i materiali della scheda guida

Scheda guida

Cerchiamo un metodo per rappresentare e risolvere i seguenti problemi.

Problema guida (1): ***In quanti modi è possibile disporre tre pedoni distinti (ad esempio numerati da 1 a tre) su una traversa fissata di una scacchiera 3x3?***

Supponiamo di disporre i tre pedoni sulla prima traversa. Il ragionamento non cambia nel caso di una traversa differente. Per mettere in evidenza le possibilità costruiamo un diagramma ad albero: rappresentiamo le possibilità per il primo pedone con il colore blu, per il secondo con quello verde ed infine utilizziamo il colore arancione per il terzo.



Il primo pedone può essere posizionato su una qualunque delle tre colonne. Una volta disposto il pedone nella posizione a1, per il secondo, rappresentato con il colore verde, ci sono due possibilità: o è collocato in b1 o in c1. La posizione del terzo pedone, rappresentata in arancione, ha una sola possibilità.

Analogamente se la posizione del primo pedone è b1 o c1. In conclusione ci sono 3x2x1=6 modi possibili di disporre 3 pedoni su una traversa. Il numero 3x2x1 è indicato con il simbolo 3!.

Lo stesso problema può essere schematizzato con il concetto di funzione. Ogni modo di disporre i tre pedoni sulla traversa definisce una funzione. Il suo dominio D è l'insieme i cui elementi sono i tre pedoni: il codominio è l'insieme delle tre case della traversa, la legge che definisce la funzione associa ad ogni pedone la casa in cui è collocato. In questo caso la funzione è una biiezione (funzione uno-uno).

$1 \leftrightarrow a$
$2 \leftrightarrow b$
$3 \leftrightarrow c$

In generale n!=n x (n-1) x...x 2 x 1 ed n! è il numero di biiezioni che si possono costruire fra due insiemi con la stessa cardinalità (numero di elementi). Nel linguaggio tradizionale del calcolo combinatorio si parla di permutazioni di n oggetti.

Verificate se avete capito: in quanti modi è possibile disporre otto pedoni distinti (ad esempio numerati da 1 a otto) su una traversa fissata di una scacchiera regolamentare? [Risposta: 8!]

Problema guida (2): ***In quanti modi è possibile disporre tre pedoni distinti (ad esempio numerati da 1 a tre) su una traversa fissata di una scacchiera regolamentare?***

Possiamo rappresentare il problema come nel caso precedente con un diagramma ad albero o con una funzione che in questo caso è iniettiva (pedoni distinti occupano case distinte, ma non è suriettiva)

La posizione del primo pedone può essere scelta in 8 modi, quella del secondo in 7, infine per il terzo ci sono 6 modi di scegliere la posizione. Le possibilità sono 8x7x6=336

$8 \times 7 \times 6 = \frac{8!}{5!}$

Nel linguaggio tradizionale si parla di disposizioni di 3 oggetti in 8 posti.

Verificate se avete capito*: **in quanti modi è possibile appoggiare una torre in una colonna sulla scacchiera regolamentare?*** [Risposta: 8^8]

Problema guida (3): Un circolo scacchistico si compone di vari giocatori. All'ultimo torneo sociale sono state selezionate 4 giocatrici per partecipare ad un torneo femminile a squadre. In quanti modi diversi si può comporre una squadra di tre fra le quattro giocatrici selezionate? (l'ultima giocatrice rimane come riserva)

Indichiamo le quattro giocatrici con le lettere a,b,c,d. La squadra si può comporre in 4 modi possibili.

{a,b,c} $\begin{cases} abc & acb \\ bac & bca \\ cab & cba \end{cases}$

{a,b,d} $\begin{cases} abd & adb \\ bad & bda \\ dab & dba \end{cases}$

{a,c,d} $\begin{cases} acd & adc \\ cad & cda \\ dac & dca \end{cases}$

{b,c,d} $\begin{cases} bcd & bdc \\ cbd & cdb \\ dbc & dcb \end{cases}$

Sia G={a,b,c,d} l'insieme delle quattro giocatrici. Scegliere la squadra equivale a comporre un sottoinsieme di G di tre elementi .

Il calcolo ha quindi un procedimento alternativo. Si calcolano tutti i modi di disporre 4 oggetti in tre posti, che risultano 4 X 3 X 2 =24. Si possono formare 24 squadre che differiscono non solo per i giocatori che le compongono, ma anche per l'ordine in cui i giocatori sono scelti. Ad ogni squadra (sottoinsieme) corrispondono 3!=6 permutazioni dei rispettivi giocatori. Se l'ordine non ci interessa, basta dividere il numero delle disposizioni per 3!

Il numero di sottoinsiemi di 3 elementi, scelti da un insieme di 4 elementi si indica con il simbolo

$$\binom{4}{3} = 4$$

In generale $\binom{n}{k}$ è il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono formare in un insieme di n elementi. Nel linguaggio tradizionale del calcolo combinatorio un sottoinsieme è una combinazione di n oggetti di classe k.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Verificate se avete capito: ***in quanti modi è possibile disporre tre pedoni indistinguibili su una traversa fissata di una scacchiera regolamentare? E otto pedoni indistinguibili?*** [Risposta$_1$: $\binom{8}{3}$ Risposta$_2$: 1]

Problema guida (4): ***Un circolo scacchistico si compone di vari giocatori. All'ultimo torneo sociale sono stati selezionati 12 giocatori per formare tre squadre di quattro giocatori ciascuno. In quanti modi diversi si possono comporre le tre squadre?***

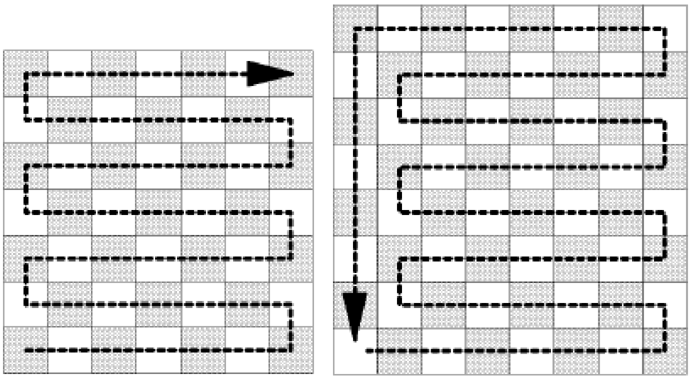
Formiamo un allineamento qualunque dei 12 giocatori. I primi quattro formeranno la prima squadra, i secondi quattro la seconda, i restanti la terza. Ci sono 12! Allineamenti possibili dei dodici giocatori. Se permutiamo i primi quattro giocatori, i secondi quattro e gli ultimi quattro in ogni modo possibile otteniamo le stesse squadre, quindi il numero richiesto è

$$\frac{12!}{(4!)^3} = 34\,650$$

Soluzione dei problemi stimolo proposti

SP071112 Andata e ritorno

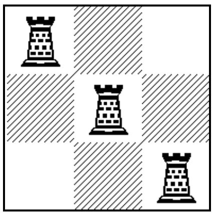
Il re si può muovere in ogni direzione di una sola casa. Se pensiamo un percorso con movimenti orizzontali o verticali non c'è dubbio che il re possa visitare tutte le case della scacchiera ordinaria (gli stessi passi possono essere compiuti dalla torre). Un esempio è dato dai seguenti diagrammi.



Tale percorso necessariamente alterna case nere e case bianche che visita in ugual numero.

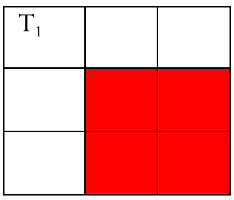
Una scacchiera 17 X 17 non ha un ugual numero di case bianche e case nere, quindi tale percorso non è possibile.

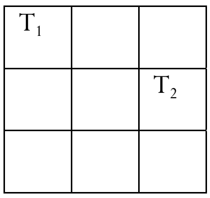
Le torri indipendenti



La prima torre può essere posizionata in una qualunque delle 9 case disponibili. Per la seconda dobbiamo togliere la riga e la colonna a cui appartiene la prima, quindi rimangono 4 case disponibili; per la terza rimane un'unica possibilità.

Ad esempio, se collochiamo la prima torre in a1, per la seconda torre rimangono come posizioni possibili le quattro case colorate in rosso





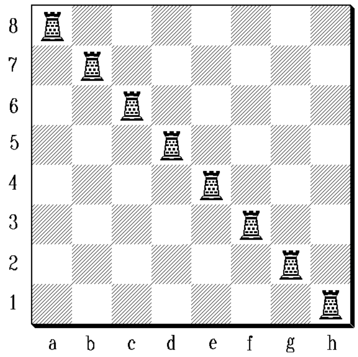
Se la seconda torre è in c2, per la terza torre rimane una sola casa possibile b3.

In conclusione il problema possiede (3x3)(2x2)x(1x1)=$(3!)^2$ soluzioni possibili.

Nel caso in cui le torri siano indistinguibili le soluzioni sono 3!

Le torri dominanti

a) Una soluzione possibile è data dal seguente diagramma

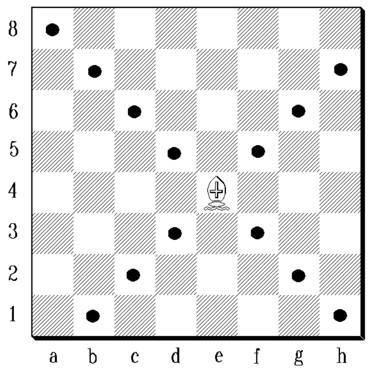


b) In una qualunque modalità ogni colonna deve contenere una torre ed anche ogni riga deve contenere una torre, altrimenti qualche casa risulta scoperta. Ci sono 8 posizioni in cui disporre una torre in una riga fissata ed 8 righe possibili. I modi in cui disporre una torre in una riga sono 8^8 ed analogamente 8^8 i modi per disporla in una colonna. Dobbiamo sottrarre le possibilità che abbiamo contato due volte perché una volta scelta, in una colonna, una casa per la torre, risulta anche fissata una riga: ci sono 8 possibilità per la prima scelta, 7 per la seconda, 6 per la terza e così via; ossia 8! possibilità.

In totale i modi possibili per disporre la torre secondo la richiesta sono 88 + 88 – 8! = 33 514 512

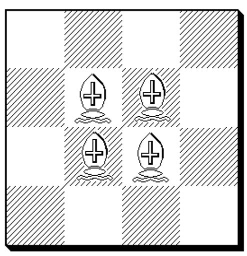
Altri problemi

Gli alfieri dominanti



Nel gioco degli scacchi l'alfiere si muove in diagonale e si sposta di quante case vuole dalla sua posizione di partenza. Si può anche pensare che l'alfiere controlla tutte le case della sua diagonale che può essere una diagonale bianca o una diagonale nera.

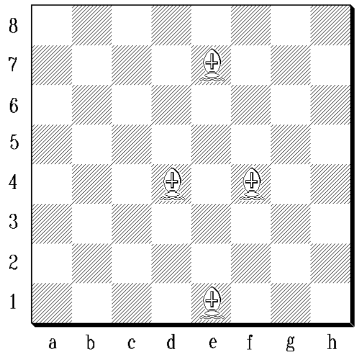
In una scacchiera 4x4 sono sufficienti quattro alfieri per controllare o "dominare" tutta la scacchiera. Una casa si dice



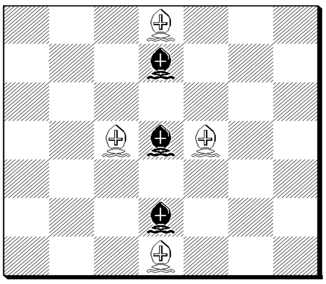
dominata da un pezzo se risulta occupata o controllata dal pezzo.

Quale è il numero minimo di alfieri necessari per dominare tutte le case di una scacchiera 8x8?
In generale quale è il numero minimo di alfieri necessari per dominare tutte le case di una scacchiera nxn?

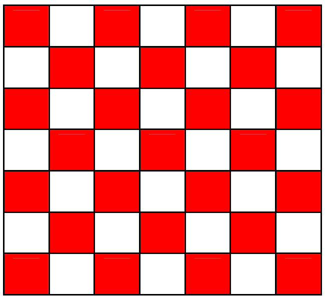
a) Poiché un alfiere si muove o su case bianche o su case nere possiamo sviluppare il calcolo separatamente nei due casi ed osserviamo le diagonali. Iniziamo dalle diagonali nere e collochiamo gli alfieri a partire dalla diagonale maggiore: ne bastano 4 per dominare tutte le case. Per simmetria servono altri 4 alfieri per dominare le case bianche. In totale il numero minimo di alfieri è 8.



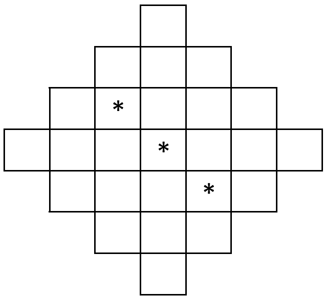
b) In generale per n pari possiamo sviluppare il calcolo separatamente per le diagonali bianche e per quelle nere e procedere in modo analogo al precedente. Il numero minimo è n. Per n dispari cade la simmetria: le diagonali bianche e nere non sono dello stesso numero. In figura è analizzato il caso 7x7.



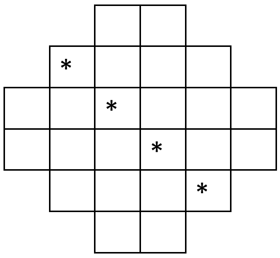
Possiamo scrivere $n=2k+1$. Osserviamo la seguente figura in cui le case nere sono colorate in rosso. Se ruotiamo la scacchiera di 45° le case rosse da controllare con alfieri



si possono rappresentare con il seguente diagramma (ogni quadrato ruotato è rappresentato con un quadrato di lati orizzontali e verticali) in cui è più facile contare il numero di alfieri necessari, tre.



Analogo diagramma si può costruire per le diagonali bianche.



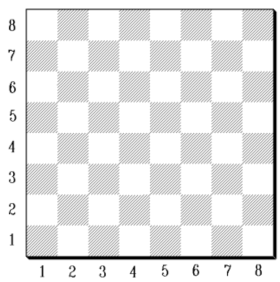
In generale le diagonali terminano sul bordo della scacchiera con k case di un colore e k+1 case dell'altro. Saranno necessari (k+1)+k = n alfieri per dominarle.

Alfieri indipendenti

Quale è il numero massimo di alfieri che è possibile collocare su una scacchiera in modo che nessuno ne attacchi un altro? Come si generalizza al caso di una scacchiera nxn? [E' sufficiente contare le diagonali a) 14; b) 2n-2]

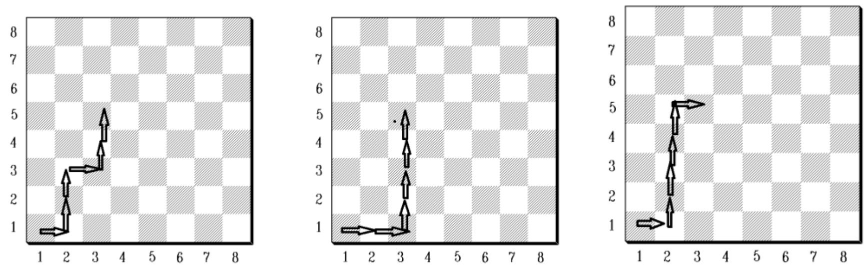
Una passeggiata del re

Una casa della scacchiera può essere individuata da una coppia di numeri (m, n) dove m rappresenta il numero di colonna da 1 a 8 ed n il numero di riga da 1 a 8.



Disegnate tre percorsi del re dalla casa (1,1) alla casa (3,5) se gli è concesso di spostarsi solo di una casella in orizzontale verso destra o in verticale verso l'alto.
Quanti sono i percorsi che può seguire il re per spostarsi dalla casa (1,1) alla casa (m,n) se gli è concesso di spostarsi solo di una casella in orizzontale verso destra o in verticale verso l'alto?

Tre possibili percorsi sono rappresentati dai seguenti diagrammi



In ogni caso sono necessari 6 spostamenti di cui 2 orizzontali e 4 verticali che possono susseguirsi in un ordine qualunque. Ci sono 6! possibili permutazioni degli spostamenti di cui 4 uguali fra loro e tre uguali fra loro, quindi i possibili percorsi P sono

$$\frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

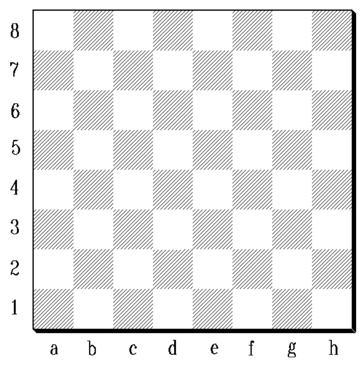
In generale dalla casa (1,1) alla casa (m,n) sono necessari m-1 spostamenti orizzontali ed n-1 spostamenti verticali e i possibili percorsi P sono

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,(n-1)!}$$

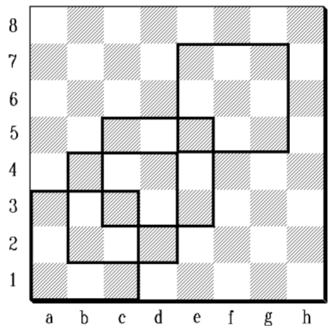
Quadrati

Su una scacchiera 8x8 costruisci quattro quadrati 3x3.

Quanti quadrati è possibile costruire sulla scacchiera?



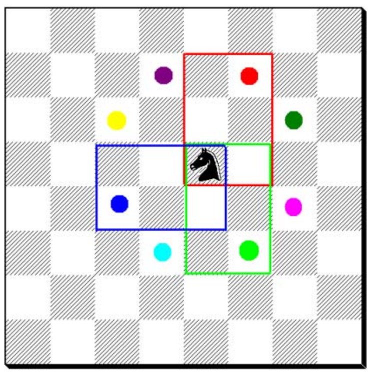
Quattro possibili quadrati sono rappresentati nella figura seguente



E’ possibile costruire quadrati 1x1; 2x2; 3x3; 4x4; 5x5; 6x6; 7x7; 8x8.
C’è un solo possibile quadrato 8x8 e ci sono 64 quadrati possibili 1x1
I possibili quadrati 2x2 si possono contare a partire da quello che occupa le prime 4 case in basso a destra, perché tutti i possibili si possono ottenere da questo mediante una traslazione di componenti (m,n) dove m ed n sono due numeri da 0 a 6. Ci sono quindi 49 possibilità di costruire la coppia ossia di formare un quadrato 2x2.
In modo analogo si possono formare i quadrati 3x3 in 36 modi possibili, i quadrati 4x4 in 25 modi possibili, i quadrati 5x5 in 16 modi, i quadrati 6x6 in 9 modi quelli 7x7 in 4 modi.
In totale i quadrati sono 64+49+36+25+16+9+4+1=204

Il ciclo del cavallo

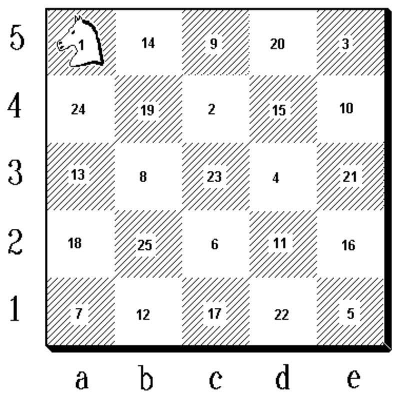
Secondo le regole del gioco degli scacchi il cavallo va nelle case che può raggiungere facendo un passo in diagonale seguito da uno orizzontale o verticale. (Secondo un’altra descrizione ogni mossa di cavallo è un movimento che interessa due case: una in orizzontale o verticale seguita da una seconda a destra o sinistra).



Un cavallo deve toccare tutte le case della scacchiera una sola volta e tornare alla casa di partenza.

Esiste tale percorso su una scacchiera 5x5?

Il cavallo alterna case bianche e nere. La scacchiera 5x5 è composta da un numero dispari di case, quindi il numero di case bianche è diverso dal numero di case nere e tale percorso non esiste. Tuttavia esistono percorsi aperti. Un esempio è il seguente



Dalle Olimpiadi della Matematica

1) In quanti modi, in una scacchiera 8x8, posso scegliere un sottoinsieme non vuoto di caselle a forma di rettangolo? (tra le scelte valide vanno contate anche l'intera scacchiera e i rettangoli costituiti da una sola casella)

A- 1 296 B- 1 440 C- 1 024 D- 1 600 E- 1 225 F- 1 156

(Gara Nazionale Classi Prime 2013 – Risposta: A- 1 296)

2) Gli interi da 1 a 9 sono scritti nelle nove caselle di una scacchiera 3x3, ogni intero in una casella diversa, in modo tale che ogni coppia di numeri consecutivi sia scritta in due caselle adiacenti (cioè aventi un lato in comune). ***Quanti sono i valori possibili del numero posto nella casella centrale?***

(Gara febbraio 2002 biennio- Risposta: 5)

3) Si vogliono colorare le nove caselle di una scacchiera 3x3 in modo tale che ogni riga, ogni colonna e ognuna delle due diagonali non contengano più caselle dello stesso colore. ***Qual è il numero minimo di colori necessario?***

A- 3 **B**- 4 **C**- 5 **D**- 6 **E**- 7

(Giochi Archimede biennio 2003 - Risposta C)

4) Nella griglia in figura si vuole andare dalla casella di partenza P alla casella di arrivo A, seguendo due regole: ci si può spostare da una casella ad un'altra solo se hanno un lato in comune; si può passare al più una volta da ogni casella. **In quanti modi può essere fatto il tragitto?**

A- 5 **B**- 8 **C**- 10 **D**- 16 **E**- 32

				A
P				

(Gara biennio febbraio 2003 Risposta D)