

Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 11 Marzo 2014

Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (7 punti) Domande essenziali

Soluzione da redigere in francese o in inglese o in tedesco o in spagnolo con un minimo di 30 parole.

Le domande essenziali sono tre; numerose le possibilità relative di formulazione che si basano su criteri di selezione quali la parità o equivalenti (non parità, divisibilità per 2), l'essere numero primo, la divisibilità, la molteplicità.....

Questa lista di domande permette attraverso le risposte di identificare il risultato del lancio come è verificabile costruendo una tabella di possibilità o una ramificazione ad albero delle possibilità.

Qui, di seguito se ne riportano due tipiche più altre rinvenute nella correzione:



- 1) il risultato del lancio è un numero minore o uguale a 3?
- 2) E' pari?
- 3) E' divisibile per 3?



- 1) Il numero è pari? (o domanda equivalente, è divisibile per 2, è multiplo di 2, è dispari..?)
- 2) E' superiore a 3,5?
- 3) E' multiplo di 3?

Alcune soluzioni rinvenute nei prodotti delle classi:



- 1) **Il numero è pari?**
- 2) E' $n > 3$?
- 3) Il numero e quello corrispondente sulla faccia opposta del dado sono consecutivi?



- 1) Il numero è pari?
- 2) E' $n > 4$?
- 3) E' divisore di 2?



- 1) Il numero è pari?
- 2) E' $1 \leq n \leq 3$?
- 3) E' n divisibile per 3?



- 1) Il numero è pari?
- 2) E' $2 \leq n \leq 5$?
- 3) E' $2 < n < 5$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) E' $n > 2$?
- 3) E' $n > 4$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) $N >$ numero centrale nei due gruppi (dei pari o dei dispari)?
- 3) N è il minore?



- 1) Il numero è pari?
- 2) $n \leq 2$?
- 3) $n \geq 5$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) E' multiplo di 3?
- 3) Può essere ottenuto con diverse operazioni?



- 1) Il numero è pari?
- 2) Nei due gruppi, in ordine crescente, non è né il maggiore né il minore?
- 3) E' il maggiore?



- 1) Il numero è pari?
- 2) $n \leq 3$?
- 3) La sua denominazione in inglese è composta di 3 lettere?



- 1) Il numero è pari?
- 2) $n \geq 5$?
- 3) $n < 3$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) È il minore ipotizzandoli nei due gruppi?
- 3) È il maggiore?



- 1) Il numero è pari?
- 2) $n \geq 5$?
- 3) $n < 3$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) È divisore di 6?
- 3) È numero primo?



- 1) il numero è pari?
- 2) $n < 5$?
- 3) $n < 3$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) E' un quadrato?
- 3) E' divisibile per 3?



- 1) Il numero è pari?
- 2) E' un quadrato?
- 3) $n < 4$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) E' multiplo di 3?
- 3) E' un numero primo?



- 1) Il numero è pari?
- 2) $2 < n < 6$?
- 3) $1 < n < 4$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) A partire dal primo numero pari, pensando i numeri in sequenza crescente, si deve aggiungere 2 per ottenere n?
- 2) $n > 4$?



- 1) Il numero è pari?
- 2) La differenza fra n e quello della faccia opposta è >0 ?
- 3) E' multiplo di 3?



- 1) e 2) idem
- 3) E' multiplo di 2?



1) E' divisore di 6?

- 2) E' pari?
- 3) E' multiplo di 3?



1) $n \leq 4$?

- 2) E' pari?
- 3) $n \leq 2$?



1) E' numero primo?

- 2) E' dispari? (o pari, o divisibile per 2)
- 3) E' multiplo di 3?



1) $1 \leq n \leq 3$?

- 2) E' multiplo di 3?
- 3) E' pari?



1) E' un quadrato perfetto?

- 2) E' pari?
- 3) $n > 4$?



1) $n \geq 3$?

- 2) E' pari?
- 3) E' un divisore di 18?



- 1) In inglese, il termine che lo denomina è scritto con un n di lettere >3?
- 2) E' pari? (o dispari?)
- 3) La lettera l è contenuta nello spelling del numero?



- 1) $n \geq 3$?
- 2) $n \geq 5$?
- 3) E' pari?

Esercizio n. 2 (5 punti) Equilibrio

Dato che i cubetti sono dello stesso materiale possiamo confrontare i volumi anziché i pesi.

$$V_1 = 8^3 \text{ cm}^3 \quad V_2 = 12^3 \text{ cm}^3 \quad \text{e il loro m.c.m.} = 2^9 3^3$$

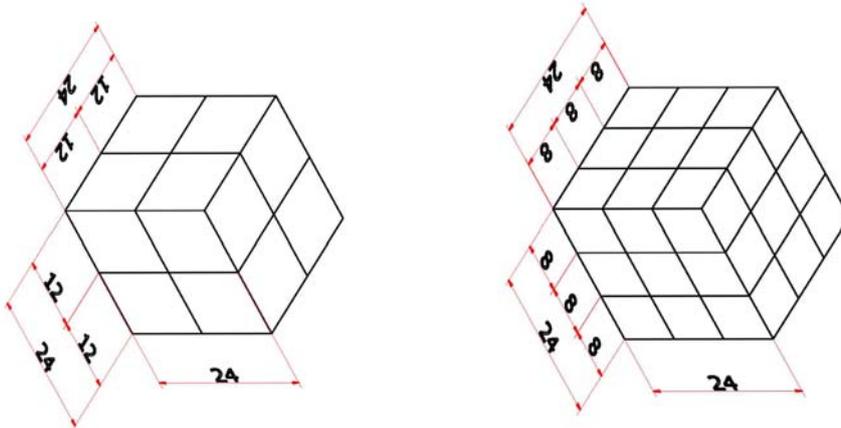
da cui

$$n_1 = (2^9 3^3) : 8^3 \quad n_1 = 27 \quad n_2 = (2^9 3^3) : 12^3 \quad n_2 = 8$$

Alcune soluzioni rinvenute nei prodotti delle classi:

a) sul piatto A mettiamo 27 cubetti, sul B 8 cubetti; il modo di procedere è stato: abbiamo utilizzato la funzione sommatrice di due calcolatrici finché il volume dei cubetti sui due piatti non è stato uguale.

b) Abbiamo costruito due cubi rispettivamente con i cubetti di lato 8 mm e 12 mm e ragionato che i due cubi, per avere la stessa massa, dovevano essere uguali; per cui devono avere lo stesso lato, m.c.m. dei due lati uguale a 24 mm.



Abbiamo, così dedotto, che servono 8 cubetti di lato 12 mm e 27 di lato 8 mm.

Esercizio n. 3 (7 punti) Che seccatura queste mele!

Consideriamo l'acqua iniziale contenuta

$$80\% \cdot 5 = 4 \text{ kg} \rightarrow \text{la massa della parte secca è } 1 \text{ kg}$$

Dopo l'evaporazione al 60% la parte secca di 1 kg costituisce il 40% della massa totale.

$$\frac{1kg}{40} 100 = 2,5 \text{ kg}$$

Pertanto la massa finale delle mele seccate è di 2,5 kg

Esercizio n. 4 (5 punti) Buon appetito

Giorno	Volume in cm ³ di quanto resta	Volume in cm ³ di quanto mangia
1	9 ³ =729	1 000 – 729 = 271
2	8 ³ =512	729-512 = 217
3	7 ³ =343	512-343 = 169
4	6 ³ =216	343-216 = 127
5	5 ³ =125	216-125 = 91
6	4 ³ =64	125-64 = 61
7	3 ³ =27	64-27 = 37
8	2 ³ =8	27-8 = 19
9	1 ³ =1	8-1 = 7
10	0	1

Esercizio n. 5 (7 punti) Curiosity!

Se Phobos potesse nascondere completamente il Sole, il suo diametro si potrebbe calcolare applicando il teorema di Talete:

$$\frac{D}{1,4 \times 10^6} = \frac{6\,000}{2,4 \times 10^8} \quad D = 35 \text{ km.}$$

Con una misura attenta si può ottenere un intervallo di diametri per Phobos e, pertanto, considerando il valore medio ottenere rapporti r diversi, accettabili se il processo di ragionamento risulta essere coerente.

Se, ad esempio, $0,42 \leq r \leq 0,62$

$$D = 35 r$$

Un altro approccio è, ad esempio, quello di calcolare già approssimati separatamente i due diametri nell'ipotesi di una "sfera deformata", denominata nel testo "patata".

Esercizio n. 6 (5 punti) Il valore della vittoria

Ha sbagliato la risposta del numero 2 su 63 quesiti.

La prima somma dei punti che supera 2014 è quella costituita da 63 addendi

$$(1+63) \cdot 63 : 2 = 2016 \quad 2014 < S_{63} \quad S_{63} = 2016$$

$$2014 = 2016 - 2$$

Esercizio n. 7 (7 punti) Squadra tuttofare

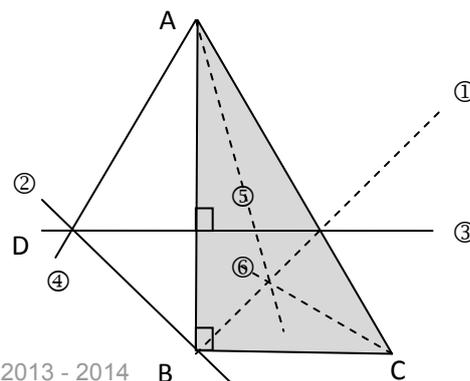
Molte sono le soluzioni e fondamentale la giustificazione.

Ecco una costruzione possibile:

La bisettrice dell'angolo retto è immediata da costruire. ①.

Le tappe ②, ③ e ④ permettono di costruire il simmetrico dell'angolo $B\hat{A}C$ rispetto a AB .

⑤ Si traccia un angolo di 45° di vertice A sul lato AD .

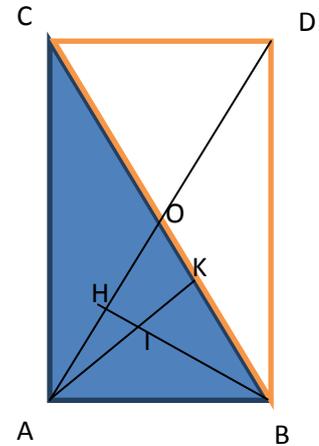


Si ottiene la bisettrice che trae origine dal vertice A.

Tenendo presente che le tre bisettrici di un triangolo sono concorrenti, si può tracciare la terza bisettrice che trae origine dal vertice C, tappa ⑥.

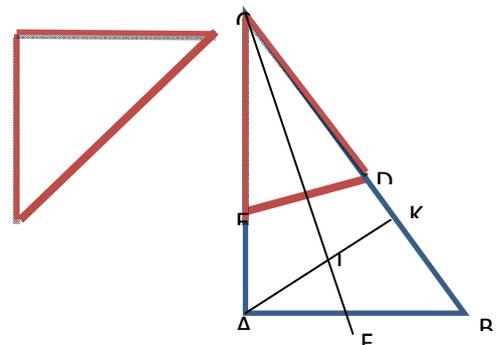
Alcune soluzioni rinvenute nei prodotti delle classi:

❖ Dato ABC rettangolo in A, mediante la squadra con angoli $45^\circ - 90^\circ - 45^\circ$, costruisco il rettangolo ABCD le cui diagonali si incontrano in O e determinano il triangolo AOB. Esso è equilatero per avere l'angolo ABO di 60° per ipotesi, $AO = OB$ perché metà diagonali di un rettangolo. Con la squadra conduco BH perpendicolare a AO che risulta pertanto la bisettrice di ABC. Sempre con la squadra non graduata con l'ipotenusa appoggiata su AB determino AK, bisettrice dell'angolo retto. Il punto I è l'incentro; conduco CI e ho individuato la terza bisettrice richiesta.



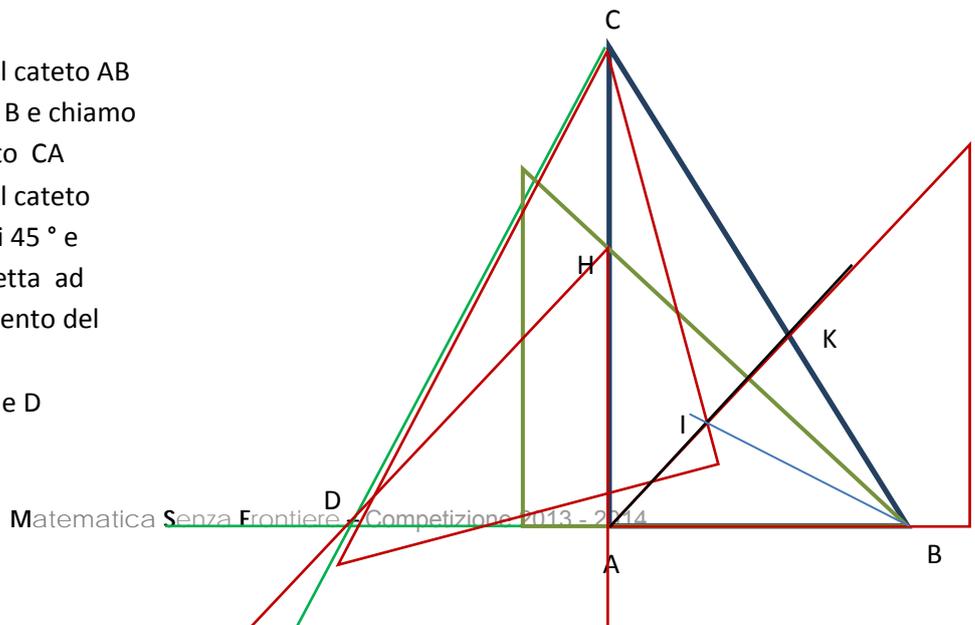
Dato ABC rettangolo in A, mediante la squadra con angoli $45^\circ - 90^\circ - 45^\circ$ determino due segmenti congruenti CE e CD \rightarrow CDE è isoscele sulla base ED, con la squadra non graduata appoggiata su ED e passante per E conduco la perpendicolare a ED che è anche bisettrice dell'angolo ECD.

Sempre con la squadra non graduata con l'ipotenusa appoggiata su AB determino AK, bisettrice dell'angolo retto. Il punto I è l'incentro, conduco BI e ho individuato la terza bisettrice richiesta.



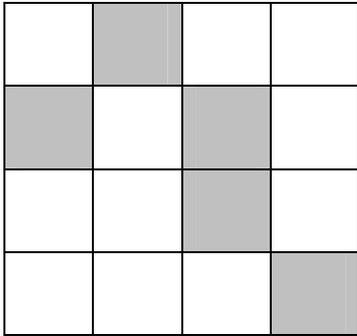
❖ Dato ABC rettangolo in A, mediante la squadra con angoli $45^\circ - 90^\circ - 45^\circ$ determino la bisettrice dell'angolo retto.

- Appoggio la squadra sul cateto AB con un angolo di 45° in B e chiamo H l'incontro con il cateto CA
- Appoggio la squadra sul cateto maggiore con angolo di 45° e vertice in H traccio la retta ad incrociare il prolungamento del cateto minore in D
- Traccio una retta per C e D



- Ottengo un triangolo isoscele CBD con angolo di 60° in B e quindi equilatero
- Appoggio la squadretta sul lato CD (verde) con angolo di 45° in C
- Traccio in questo modo la bisettrice del triangolo originario in C
- Il punto I è l'incentro, conduco BI e ho individuato la terza bisettrice richiesta.

Esercizio n. 8 (5 punti) Grigio intrigante



Esercizio n. 9 (7 punti) Quadro geometrico magico

S'inizia assemblando le due figure sulla riga (o sulla colonna) e si evidenzia nella casella vuota la parte mancante per ottenere il quadrato; si prosegue analogamente operando sulla colonna (o sulla riga) e quindi si completa la diagonale e, infine, si ottiene il quadrato magico qui sotto riprodotto:

Esercizio n. 10 (10 punti) Giri di squadra

I volumi sono:

- quando la squadra ruota attorno all'ipotenusa si hanno due coni uniti per la base

misura del raggio = $(12 \cdot 16) : 20 \text{ cm} = 9,6 \text{ cm}$
 pari all'altezza relativa all'ipotenusa

$V_{\text{bicono}} = \pi (9,6^2 \cdot 20) : 3 \text{ cm}^3$

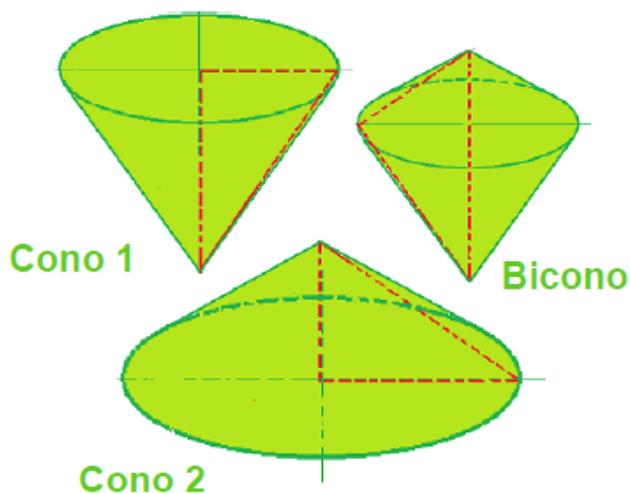
- quando la squadra ruota attorno al cateto minore si ha un cono di altezza 12 cm e raggio 16 cm

$V_2 = \pi (16^2 \cdot 12) : 3 \text{ cm}^3$

- quando la squadra ruota attorno al cateto maggiore si ha un cono di altezza 16 cm e raggio 12 cm

$V_1 = \pi (12^2 \cdot 16) : 3 \text{ cm}^3$

Luca ha, pertanto, torto



Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) L'orda degli uno

L'esercizio fa riferimento alla divisione euclidea che può essere richiamata per gli studenti: *la divisione euclidea di un numero A per un numero B (diverso da 0) consiste nella procedura che determini quante volte il numero B può essere sottratto da A fino ad ottenere un numero minore di B.*

Si ragiona per raggruppamenti: poiché 111 111 è il minore dei multipli di 7 scrivibile con tutte cifre uguali ad uno ed è composto da sei 1, si divide 2014 per 6 e si ottiene 335 con resto di 4.

Il numero composto da quattro 1 è 1 111 che diviso per 7 dà come risultato 158 con **resto 5** che è, appunto, il resto richiesto.

Esercizio n. 12 (7 punti) Ben giocato

Se si indica con $P(E_x)$ la Probabilità che si verifichi l'evento costituito dalla presenza della faccia del dado con il numero x , si può costruire la seguente tabella delle singole Probabilità

Lancio del dado	Probabilità						
	Numero 0	Numero 1	Numero 2	Numero 3	Numero 4	Numero 5	Numero 6
A	1/3				2/3		
B				1			
C			2/3				1/3
D		1/2				1/2	

e, inoltre, se si tiene presente che la Probabilità è composta, si ha che

Se	si ha che	si ha che	si ha che	allora
Giovanni lancia A	B supera A con P 1/3	C supera A con P 5/9	D supera A con P 2/3	Lena lancia C Lena lancia D
Giovanni lancia B	A supera B con P 2/3	C supera B con P 1/3	D supera B con P 1/2	Lena lancia A
Giovanni lancia C	A supera C con P 4/9	B supera C con P 2/3	D supera C con P 1/3	Lena lancia B
Giovanni lancia D	A supera D con P 1/3	B supera D con P 1/2	C supera D con P 2/3	Lena lancia C

Se consideriamo, per esempio, il primo caso si ha , infatti:

$$P = 2/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 1 \quad \mathbf{P = 5/9}$$

Esercizio n. 13 (10 punti) Sotto il triangolo la capra campa

La superficie che la capra può brucare si può scomporre in tre rettangoli, tre terzi di cerchio e la parte evidenziata nel triangolo.

Resterà un piccolo triangolo al centro del triangolo della rotaia. Le tre parti di cerchio possono essere raggruppate considerando un cerchio intero d'area $4\pi \text{ m}^2$.

I tre rettangoli colorati in beige all'esterno della rotaia hanno un'area che misura $3 \times 10 \times 2 = 60 \text{ m}^2$.

Il quadrilatero ABCD è composto da due triangoli rettangoli sovrapponibili aventi un angolo di 30° e l'altro di 60° .

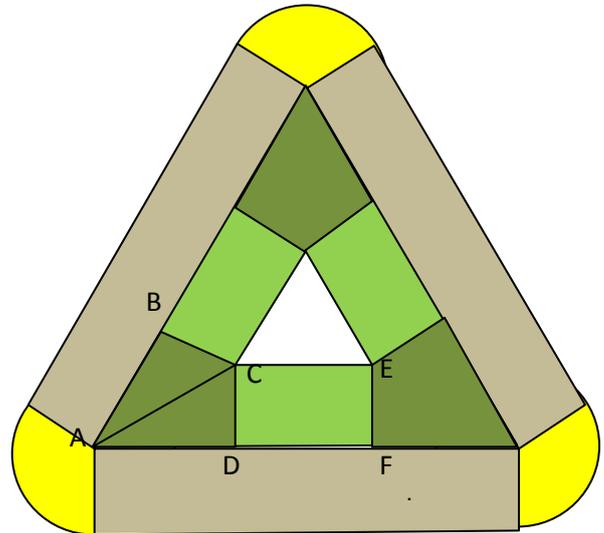
$$BC = 2 \text{ m e } AC = 4 \text{ m.}$$

L'area di questo quadrilatero misura, quindi, $4\sqrt{3} \text{ m}^2$.

$AD = 2\sqrt{3}$ da cui $DF = 10 - 4\sqrt{3}$ e l'area del rettangolo DCEF misura $20 - 8\sqrt{3} \text{ m}^2$ (pari a circa $6,14 \text{ m}^2$)

L'area della superficie che può essere brucata dalla capra all'interno della rotaia è allora

$$3 \times 4\sqrt{3} + 3(20 - 8\sqrt{3}) = 60 - 12\sqrt{3} \text{ m}^2 \text{ (pari a circa } 39,22 \text{ m}^2 \text{).}$$



La misura della superficie che può essere brucata dalla capra risulta

$$(4\pi + 60 + 60 - 12\sqrt{3} = 120 + 4\pi - 12\sqrt{3}) \text{ m}^2 \approx \mathbf{111,78 \text{ m}^2}.$$