

# Matematiikka Ilman Rajoja – Suomi

maaliskuu 2012

- Kilpailun aikana ei saa käyttää kännyköitä.
- Kirjoita jokainen ratkaisu omalle paperilleen.
- Kaikista ratkaisuista, myös keskeneräisistä, voi saada pisteitä.
- Kilpailuaika on 2 tuntia.

## Tehtävä 1. Tour de chien

7 pistettä

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Mein Hund und ich starten gemeinsam in gleicher Richtung zu einer Tour um den See. Wir nehmen den gleichen Weg, jeder mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Aber mein Hund läuft schneller als ich und überholt mich einmal bevor wir wieder gleichzeitig an unserem Ausgangspunkt ankommen.

*Wenn nun mein Hund mit der gleichen Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung den See umrundet hätte, wie viele Male hätte er dann meinen Weg gekreuzt? Begründet eure Antwort.*

My dog and I set out together to go round the lake. We left at the same time from the same starting point, we both took the same path in the same direction and we travelled at a constant speed. But my dog goes much faster than I do and he passed me once before we arrived back at the same time at the starting point.

*What if my dog had gone round the lake at the same speed but in the other direction, how many times would he have passed me? Explain your answer.*

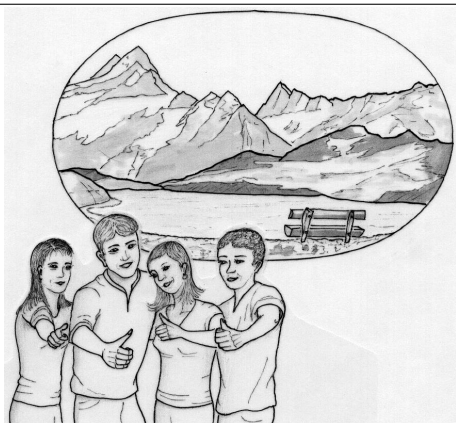
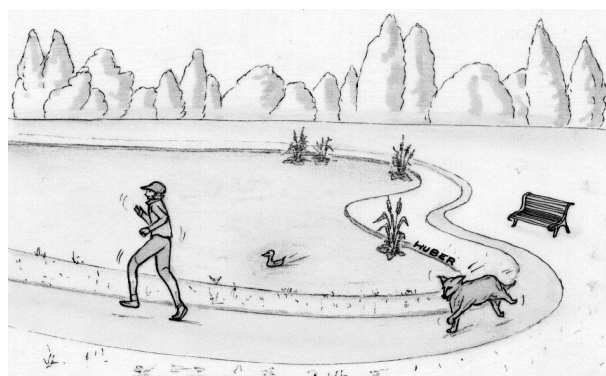
Mi perro y yo salimos juntos y en el mismo sentido para dar la vuelta al lago. Tomamos el mismo camino, cada uno a una velocidad constante. Pero mi perro va bastante más rápido

que yo y me adelanta una vez antes de que lleguemos los dos, en el mismo instante, a nuestro punto de partida.

*Y si mi perro hubiese dado vueltas alrededor del lago a la misma velocidad, pero en sentido contrario, ¿cuántas veces me cruzaría con él? Explícalo.*

Il mio cane ed io ci avviamo assieme per fare il giro del lago nel medesimo senso. Imbocchiamo il medesimo cammino, ciascuno con una velocità costante. Il mio cane, però, è più veloce di me e mi supera una volta prima che si arrivi assieme nello stesso istante al punto della nostra partenza.

*E se il mio cane avesse girato attorno al lago alla stessa velocità precedente, ma in senso inverso, quante volte mi avrebbe incrociato? Spiegate la risposta.*



## Tehtävä 2. Näin se ratkaistaan

5 pistettä

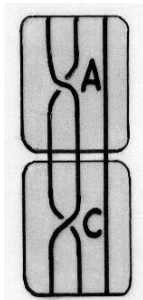
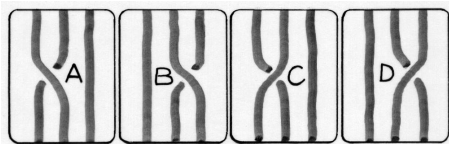
Neljä ystäväystä – Louise, Mylene, Jules and Cissé ovat palanneet lomaltaan. He ovat matkustaneet autolla ja nyt on päätettävä kuinka kustannukset jaetaan. Louise maksoi bensiinin: 96 €.

Mylène maksoi moottoritiemaksut : 42 €.

Jules maksoi kaikkien välipalat 18 €.

Cissé lainasi Julekselle 15 €auttaakseen häntä ostamaan lahjan äidilleen. Ystävykset tahtovat jakaa kustannukset tasan ja niin, että tulee mahdollisimman vähän rahan siirtämistä.

*Kerro, kuinka he toimivat.*



### Tehtävä 3. Palmikot- helpot kuin aakkoset

7 pistettä

Cindyllä ja Pierrickillä on tietokone ohjelmisto, jonka avulla he voivat luoda kaikki erilaiset palmikot, jotka ovat mahdollisia tehdä kolmeen säikeeseen jae-tuista hiuksista.

Palmikot ovat luotu toimintojen sarjana neljästä toiminnosta A, B, C, D, jotka on kuvattu alla.

He huomaavat, että C mitätöi A:n, koska sarja AC antaa kolme yhdensuuntaista säiettä, kun niitä kiristetään.

*Kirjoita ylös kaikkien toimintojen sarjat, jotka kumoavat toisensa.*

*Pierrick näppäili satunnaisesti sarjan DDACBAAACDDCABABD.*

*Anna viiden operaation sarja, joka voitaisiin kirjoittaa Pierrickin jälkeen niin, että se kumoaa palmikon.*

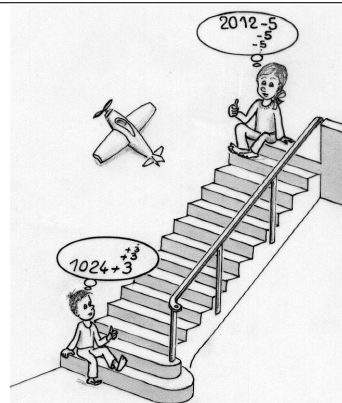
*Helppoa kuin aakkoset!*

### Tehtävä 4. Lasketaan yhdessä

5 pistettä

Michèle ja Michel laskevat yhtä aikaa ja samassa rytmissä. Michèle aloittaa 2012:sta ja vähentää edellisestä luvusta aina viisi : 2012, 2007, 2002, 1997 ... Michel aloittaa 1024 ja lisää edelliseen lukuun aina kolme : 1024, 1027, 1030, 1033 ...

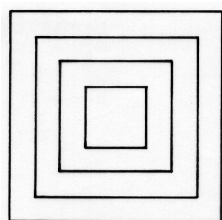
*Mitkä ovat toisiaan lähimmät luvut, jotka he sanovat yhtä aikaa? Perustele vastauksesi.*



### Tehtävä 5. Sateen jälkeen

7

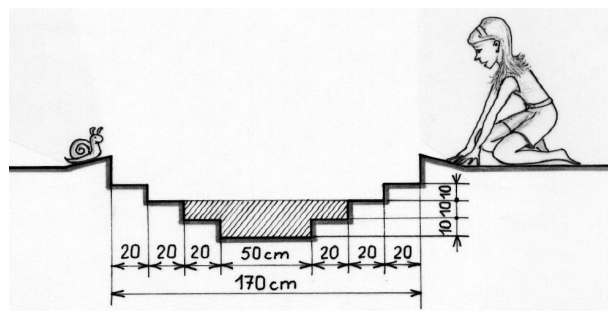
pistettä



Coralie on rakentanut puutarhaansa lammen. Sen reunoilta on portaat pohjalle, kuten kuvassa on piirretty. Lammen pohja on neliö, jonka sivu on 50 cm.

Jokaiset kolme porrasta ovat 10 cm korkeita ja portaalan pituus on 20 cm. Pohja on vaakasuora. Yht'äkkiä tulee myrsky ja raju kaatosade. Sateen jälkeen tulee taas kaunis ilma ja Coralie huomaa, että veden pinta on toisen porrassaskelman tasolla.

*Kuinka paljon vettä sateen aikana satoi yhtä neliömetriä kohden? Ilmaise veden tilavuus litroissa. Perustele vastauksesi.*

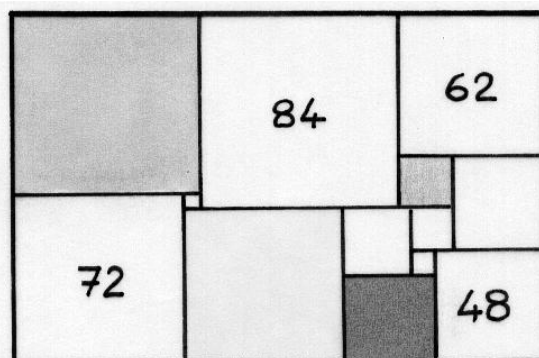


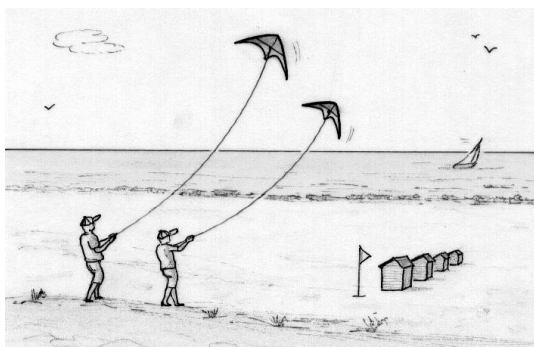
### Tehtävä 6. Neliöitä

5 pistettä

Kuvassa on nelikulmio, joka koostuu 13 neliöstä. Neliöiden sivujen pituudet ovat kokonaislukuja ja ilmaistu millimetreissä. Kaikki neliöt ovat erikokoisia. Kaikki kuvassa olevat neljä lukua ilmaisevat kyseisen neliön sivun pituuden.

*Ratkaise muiden neliöiden sivujen pituudet. Piirrä isompi kuva ja kirjoita siihen kaikkien neliöiden sivujen pituudet.*





### Tehtävä 7. Leijan lennätys

7 pistettä

Piirrä tasasivuinen kolmio ABC ympyrän sisälle, jonka säde on 8 cm. P on piste kolmion ABC sivulla. Pisteen P kautta kulkeva suora on kohtisuorassa janan BC kanssa ja leikkaa ympyrän pisteissä E ja F. Merkitse piste M, joka on puolivälissä janaa EP, ja piste N, joka on puolivälissä janaa FP.

*Merkitsemällä tarpeeksi pisteitä piirrä käyrät, jotka jäljittelevät pisteiden M ja N liikkumista, kun piste P liikkuu pitkin kolmion ABC kolmea sivua.*

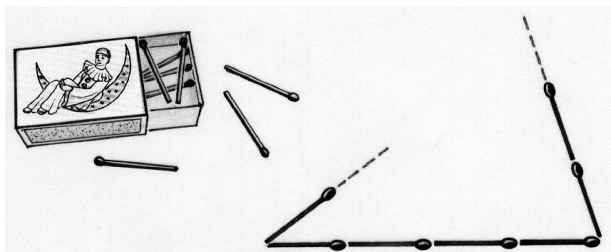
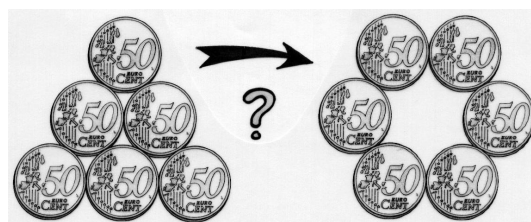
### Tehtävä 8. Tarkan sentin vartija

5 pistettä

Kuusi kolikkoa järjestetään kolmioksi pöydälle kuvan osoittamalla tavalla. Pentti on löytänyt viiden siirron sarjan jolla kolikot saadaan oikeanpuoleisen kuvan osoittamaan muodostelmaan.

Yksi siirto koostuu yhden kolikon liikuttamisesta kerrallaan niin että mikään muu kolikko ei liiku ja niin että se lopulta koskettaa kahta muuta kolikkoa. Senni on löytänyt tavan tehdä tämä vain neljällä siirrolla.

*Piirrä Pentin löytämän viiden siirron sarjan kuusi muodostelmaa. Tai vielä parempi olisi yrittää löytää ratkaisu Sennin löytämälle neljän siirron sarjalle. Piirrä Sennin löytämän neljän siirron viisi muodostelmaa selkeästi.*



### Tehtävä 9. Tulitikkuja lainaamassa

7 pistettä

Sinulla on 21 tulitikkuja, jotka ovat kaikki saman pituisia. Teet ensin suoran viivan käyttämällä osan tulitikuista laittamalla yhden tikun toisen perään. Täydennät sitten rakennelman tehdäkseen siitä kolmion käyttämällä loput tulitikuista. Kolmion kaikki sivut muodostuvat tulitikkujen kokonaisluvusta.

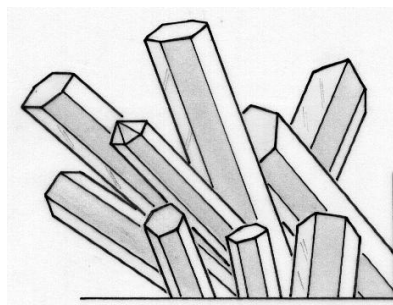
*Kuinka monta erilaista kolmiota voit tehdä käyttäen 21 tulitikkuja? Kirjoita ylös kaikki mahdolliset ratkaisut.*

### Tehtävä 10. Kristallin Kirkasta

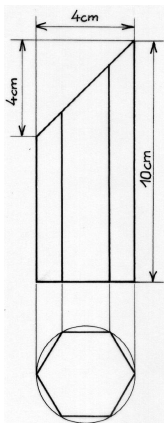
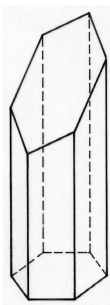
10 pistettä

Kvarttikristallit esiintyvät usein kuusikulmaisina särmiöinä. Alla olevassa kuvassa olevalla kristallilla on pohjana säännöllinen heksagoni, jonka sivun pituus on 2 cm. Särmiön leikkaa lävistäjä, joka on  $45^\circ$  sen pohjaan nähden.

*Piirrä kristallin tarkka tasokuvio. Tasokuvion tulee olla todellisen kokoinen ja osoittaa sekä pystysuorat pinnat että kaksi kuusikulmaista pintaa.*



kolmiulotteinen kuva



oikeanpuoleinen sivu

pohja





### Tehtävä 11. Vielä yksi mahdollisuus vapauteen pistettä

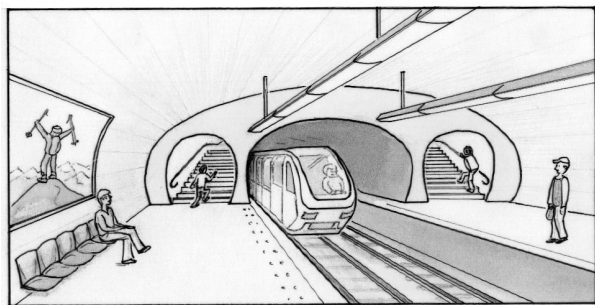
5

Vanki pyytää, että hänelle annettaisiin vielä yksi mahdollisuus. Vartija päättää antaa hänelle vielä toivoa vapaudesta. Hän tuo kaksi uurnaa, 12 valkoista ja 12 mustaa marmorikuulaa. Vangin on jaettava kaikki 24 kuulaa kahteen uurnaan vapaasti, kuulien värillä ja määrällä yhteen uurnaan ei ole väliä. Sitten vartija valitsee sattumanvaraisesti toisen ruukun ja nostaa siitä katsomatta yhden marmorikuulan. Jos kuula on valkoinen, niin vanki pääsee vapaaksi.

*Miten vangin on jaettava marmorikuulat uurnien kesken, jotta hänellä olisi paras mahdollisuus vapautua? Laske myös vapautumisen todennäköisyys tässä tilanteessa?*

### Tehtävä 12. Metroaseman portaat 7 pistettä

7



Odottaessaan metrossa tyttöystäväänsä Julieta Lucas katselee ihmisten erilaisia tapoja nousta portaita ylös asemalta. Hän pohtii, kuinka monella eri tavalla portaatta voi nousta ylös, jos jokaisella askeleella nousee joko kaksi rappusta tai yhden rappusen kerrallaan.

«Portaille, joissa on vain kaksi tai kolme rappusta vastaus löytyy helposti, mutta entäpä portaille, joissa on 4 askelmaa? No, aluksi ensimmäiselle askeleelle on 2 mahdollisuutta ja sitten minulla on joko 2 tai 3 porrasta vielä jäljellä...»

«Hei Lucas, mitä oikein haaveilet?» sanoo Julie. Lucas ei ollut huomannut hänen tuloaan. «Tule nopeasti, olemme myöhässä.»

*Kuinka monta erilaista tapaa on nousta portaatta, joissa on 13 askelmaa siten, että nousee joko yhden tai kaksi porrasta kerrallaan? Perustele selkeästi, miten sait tehtävän ratkaistuksi.*

### Tehtävä 13. Sisäkkäin menevä muki

10 pistettä

Nicole toimii aina varman päälle. Hän kantaa mukanaan käsilaukussa sisäkkäin menevää muovimukia kaiken varalta. Mukissa on kiinteä pohja ja viisi kartionmuotoista muovirengasta. Viisi rengasta (kuva 1) menevät sisäkkäin niin, että muki on lähes litteä (kuva 2).

Alla oleva kuva esittää mukia litistettynä.

Pohjakappaleen sisähalkaisijat ovat 30 ja 38 mm. Kartionmuotoisten renkaiden säde on aina 4 mm isompi kuin edellisen pienemmän renkaan. Kunkin renkaan korkeus on 20 mm. Kaikkien kappaleiden paksuudet ovat samat.

*Mikä on avatun mukan sisäkorkeus? Perustele vastauksesi.*

*Voit myös selvittää, kuinka paljon nestettä mukiin mahtuu. Laske mukan tilavuus. Muista esittää selkeästi laskun eri vaiheet. Voit käyttää seuraavaa kaavaa kartiorengaan tilavuudelle  $V$ , missä renkaan säteet ovat  $r$  ja  $R$  ja korkeus  $h$ .*



kuva 1



kuva 2

