

Matematica Senza Frontiere

Competizione 14 Marzo 2013

Proposta di soluzione

- ? Usare un solo foglio risposta per ogni esercizio per il quale deve essere riportata una sola soluzione, pena l'annullamento.
- ? Sono richieste spiegazioni o giustificazioni per gli esercizi: 1, 5, 6, 7, 9, 11, 13.
- ? Saranno esaminate tutte le risposte, anche se parziali.
- ? Si terrà conto dell'accuratezza della soluzione.

Esercizio 1 (7 punti) Chi vede chi?

Soluzione da redigere in francese o in inglese o in tedesco o in spagnolo con un minimo di 30 parole.

Le possibilità di attribuzione dei cappelli sono:

Possibilità	1	2	3	4	5	6	7
Anatole	R	R	R	R	V	V	V
Michel	R	R	V	V	R	R	V
Thomas	R	V	R	V	R	V	R

Tre casi sono da eliminare:

- ? Caso 4: Anatole risponde "no" perché non ha visto 2 cappelli verdi
- ? Caso 6: Michel risponde "no" perché non ha visto 2 cappelli verdi
- ? Caso 2: se Michel avesse visto un cappello verde su Thomas, avrebbe pensato "se avessi un cappello verde, Anatole avrebbe detto "sì". Io ho dunque un cappello rosso". Michel non avrebbe potuto rispondere "no".

In tutti gli altri casi Thomas ha un cappello rosso e non ha bisogno di vedere per dire "sì".

Esercizio 2 (5 punti) Matemagia

La somma di tre numeri della tabella data che rispettino le consegne è sempre 27.

Utilizzando la proprietà precedente e verificando che i numeri proposti siano tutti diversi potremo costruire un'analogha tabella "magica" con somma 40.

Alcuni esempi:

1	4	19
8	11	26
10	13	28

17	6	1
24	13	8
26	15	10

Si può osservare che si passa da una riga all'altra (o da una colonna all'altra) aggiungendo uno stesso numero ai tre numeri che la compongono.

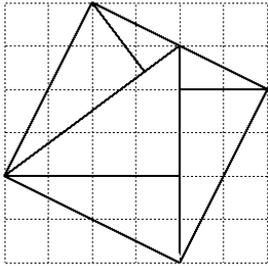
Esercizio 3 (7 punti) Per non restare a secco!!

Si presentano due possibilità:

- ✎ il secondo rettangolo è appena diventato bianco, rimangono quindi $\frac{2}{3}$ del serbatoio e $252,6 \times 2 = 505,2$ km da percorrere di cui $\frac{3}{4}$ prima di entrare in riserva, cioè:
 $(505,2 : 4) \times 3 = \mathbf{378,9 \text{ Km}}$
- ✎ Il terzo rettangolo diventa bianco proprio dopo l'osservazione dello strumento, rimane quindi l'altra metà del serbatoio e $252,6$ km da percorrere di cui $\frac{2}{3}$ prima della spia "riserva", cioè:
 $(252,6 : 3) \times 2 = \mathbf{168,4 \text{ km}}$

Si può allora affermare che è possibile percorrere al massimo **378,9 km** e al minimo **168,4 km**.

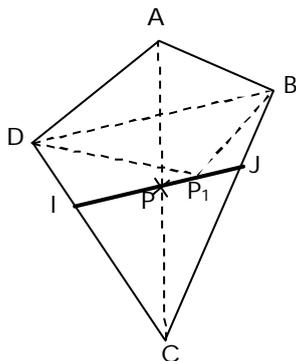
Esercizio 4 (5 punti) Triangoli al quadrato



Possiamo calcolare l'area dei triangoli dati e quindi riconoscere che il quadrato dovrà avere lato lungo $\sqrt{20}$ che rappresenta la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo di cateti 2 cm e 4cm.

Si può individuare la soluzione anche per tentativi operando con modelli.

Esercizio 5 (7 punti) Spartizione fraterna



P è il punto medio di AC.

Dato che due triangoli di uguale base e uguale altezza sono equivalenti avremo che:

APD equivalente DPC APB equivalente CPB ✎ ADPB equivalente DPBC

L'insieme delle soluzioni proposto da Paolo è il segmento IJ passante per P e parallelo a DB.

Infatti: se P_1 è un qualunque punto del segmento IJ l'area del triangolo BDP_1 è uguale all'area del triangolo BDP (stessa base e stessa altezza). Pertanto l'area del quadrilatero ABP_1D è uguale a quella del quadrilatero ABPD.

Esercizio 6 (5 punti) Ritorno agli inizi

Si procede a partire dal dato finale; c'è una sola possibilità ad ogni turno (solo un numero è dispari). Si può redigere una tabella:

	Alessandro	Claudio	Samuele	
Fine della 5 ^a mano	10	9	8	
Fine della 4 ^a mano	5	18	4	Claudio perde
Fine della 3 ^a mano	16	9	2	Alessandro perde
Fine della 2 ^a mano	8	18	1	Claudio perde
Fine della 1 ^a mano	4	9	14	Samuele perde
Inizio gioco	2	18	7	Claudio perde

Esercizio 7 (7 punti) Schiena contro schiena

- ? Supponiamo **1a vera**: il numero cercato ha due cifre ed è dispari (per ipotesi 1b è falsa). E' anche un quadrato (2a vera essendo 2b falsa, il numero cercato ha due cifre). I quadrati dispari a due cifre sono 25, 49, 81 e dato che nessuno di questi verifica la 3a o la 3b vuol dire che la nostra ipotesi iniziale è falsa.
- ? **1b è vera**, il numero è pari e perciò non può essere il prodotto di due numeri dispari consecutivi \approx 4a è falsa \approx 4b vera \approx il numero è uguale ad un numero al quadrato più 1. Non può essere un quadrato per cui 2a è falsa e 2b è vera e il numero ha tre cifre.

A questo punto consideriamo i dati:

$$\begin{array}{lll} 11^2 ? 1 ? 122 & 19^2 ? 1 ? 362 & 27^2 ? 1 ? 730 \\ 13^2 ? 1 ? 170 & 21^2 ? 1 ? 442 & 29^2 ? 1 ? 842 \\ 15^2 ? 1 ? 226 & 23^2 ? 1 ? 530 & 31^2 ? 1 ? 962 \\ 17^2 ? 1 ? 290 & 25^2 ? 1 ? 626 & \end{array}$$

Tutti i numeri sono pari e hanno più di due divisori \approx 3b falsa e 3a è vera, e fra questi soltanto 170 e 730 contengono la cifra 7 e dato che nessuno di questi è divisibile per 11 deve risultare un numero al cubo aumentato di 1.

Il numero è $730 = 9^3 + 1$

Esercizio 8 (5 punti) Al biliardo

Il punteggio totale è 120.

Le ripartizioni possibili sono:

$$\begin{aligned} 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 5 &= 80 \\ 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 9 + 6 &= 80 \\ 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 8 + 7 &= 80 \\ 15 + 14 + 13 + 12 + 10 + 9 + 7 &= 80 \\ 15 + 14 + 13 + 11 + 10 + 9 + 8 &= 80 \end{aligned}$$

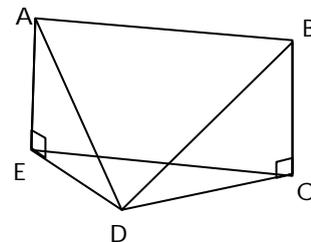
Esercizio 9 (7 punti) La diga di Malò

Liliana arriva in A.

$AE = BC = 5$ m è l'altezza della diga.

Il triangolo ABD è rettangolo isoscele \approx $AD = 10\sqrt{2}$ e la pendenza è

$$\frac{AE}{AD} ? \frac{5}{10\sqrt{2}} ? \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,353 \text{ che corrisponde ad una } \mathbf{inclinazione \text{ del } 35\%}$$



Se vogliamo un'inclinazione del 25% deve essere $\frac{AE}{AD} = 0,25$; $AD = \frac{5}{0,25} = 20$.

$$\cos \widehat{ADB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ e } \widehat{ADB} = 60^\circ$$

Per determinare l'angolo richiesto si può anche procedere osservando che:

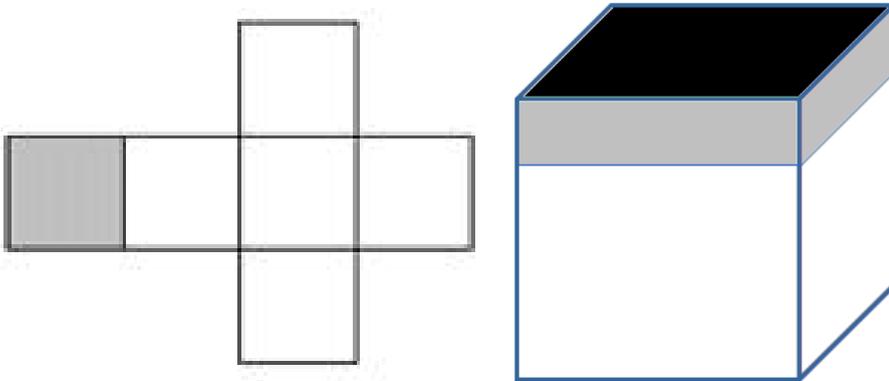
il triangolo ADB, rettangolo in B, ha l'ipotenusa AD doppia del cateto BD e quindi $\widehat{ADB} = 60^\circ$.

Liliana deve deviare di 60° .

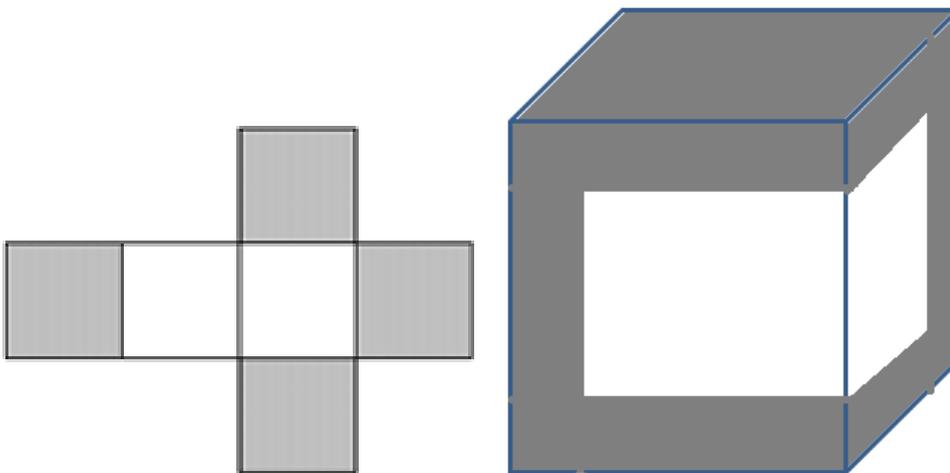
Esercizio 10 (10 punti) Senza colore

Il cubo grande deve essere composto da più di 48 cubetti. Si possono presentare due casi:

- ? primo caso: 4 cubetti su ogni spigolo e 64 cubetti in tutto: dipingendo una sola faccia, ad esempio quella superiore (16 cubetti), ne restano 48 non colorati;



- ? secondo caso: 5 cubetti per ogni spigolo e 125 cubetti in tutto. La parte non dipinta del cubo precedente (primo caso) possiamo vederla inserita in un cubo di 125 cubetti. Questo cubo dovrà avere 4 facce colorate e 2 contigue non colorate.



Speciale terze

Esercizio 11 (5 punti) Assemblea generale di MsF

Si pensi ad una successione di D e U su un cerchio.

7 D hanno una D a destra e 12 D hanno un U a destra, quindi $7 + 12 = 19$ D in tutto.

Avendo 7 D una D a destra abbiamo 7 volte DD perciò 7 D hanno una D a sinistra.

Pertanto $19 - 7 = 12$ D hanno un U a sinistra e di conseguenza 12 U hanno una D a destra.

Sapendo che 3 U su 4 hanno una D alla loro destra si deduce che gli U sono 16 in tutto.

La probabilità che sia scelta una donna è: $\frac{19}{35}$

Esercizio 12 (7 punti) Scende o sale?

Siano d il diametro dell'asse (1 cm) e D quello delle ruote (10 cm). Sia α l'angolo richiesto.

Sia θ l'angolo di rotazione delle ruote.

Per il percorso delle ruote sul piano inclinato si ha $s_1 = \theta D \frac{\theta}{360}$.

Nello stesso tempo il filo si accorcia di $s_2 = \theta d \frac{\theta}{360}$.

La perdita di altezza è $h = s_1 \sin \theta = \theta D \frac{\theta}{360} \sin \theta$.

Il peso deve restare alla stessa altezza: $h = s_2$ e quindi $d = D \sin \theta$ e $\sin \theta = \frac{d}{D} = \frac{1}{10}$.

Da cui $\alpha = 6^\circ$.

Con un altro ragionamento: 1 giro corrisponde alla circonferenza della ruota, cioè 10π ; ogni giro della ruota trascina un avvolgimento di π . Ci si trova nel caso di un triangolo rettangolo di ipotenusa 10π e cateto π ; il rapporto ci condurrà a $\sin \theta = \pi / 10\pi$ e $\sin \theta = 1/10$

Esercizio 13 (10 punti) E' iscritto

Usando il teorema di Pitagora o calcolando le misure delle aree si ottiene: $xy = 32$

Trattandosi di numeri interi le soluzioni possibili sono:

x	y	Misura dei lati
1	32	9 - 40 - 41
2	16	10 - 24 - 26
4	8	12 - 16 - 20