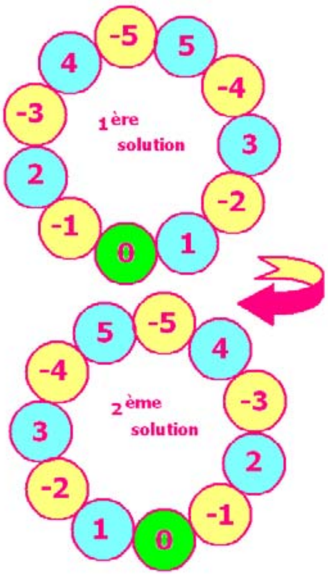
Matematica Senza Frontiere

Elementi di soluzione per la correzione della prova di accoglienza 2009-2010

Esercizio 1 : **Per ricordare** **(**7 punti)

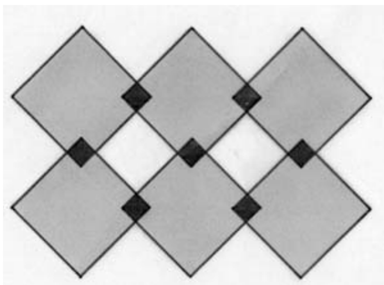
Irène non ha né fratelli né sorelle, dunque Jeanne, Gilles e Irène hanno tre madri diverse.
Emile e Hector hanno ciascuno una sorella. Da cui si può dire che hanno la stessa madre di Jeanne.
François è necessariamente fratello di Gilles.
Così, Béatrice ha tre bambini: Jeanne, Emile e Hector.



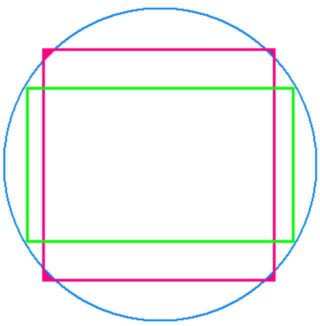
Esercizio 2 : **Perle di calcolo** (5 punti)

Si osserva che 0 deve essere messo necessariamente tra –1 e 1, tutto il resto viene di conseguenza.
Ci sono pertanto solo due soluzioni, una simmetrica dell'altra (vedi il disegno).

Esercizio 3 : **Logo** (7 punti)



Sia a la misura dei lati dei quadratini neri e x quella dei lati dei quadrati grandi (grigi). Fra i quadrati grigi, 4 sono privati di 2 vertici e 2 di 3 vertici, da cui l'equazione :
$6x^2 - 14a^2 = 40\times 7a^2 \Rightarrow x^2 = 49a^2$ da cui $\boxed{x = 7a}$.



<u>Esercizio 4 : Eppure gira ! 5 punti</u>

Un piatto rettangolare può girare nel microonde soltanto se la sua diagonale è inferiore a 35 cm.

Così un piatto quadrato di lato 25 cm non potrà girare perché la sua diagonale è $25\sqrt{2} \approx 35{,}35 > 35$ mentre un piatto rettangolare di dimensioni 30 cm $\times$ 18 cm girerà perché $\sqrt{30^2+18^2} = \sqrt{1224} \approx 34{,}98$.

<u>Esercizio 5 : La scelta, 7 punti</u>

Per isolare 1 pezzo falso fra 9, Giovanni fa tre gruppi da 3 pezzi e poi paragona due gruppi fra loro con la bilancia a due piatti. Se la bilancia resta in equilibrio, il pezzo falso si trova nel terzo gruppo, altrimenti si trova in quello più leggero.
Successivamente paragona tra loro due monete del gruppo contenente quella falsa e la identifica seguendo lo stesso ragionamento.
Per isolarne una falsa fra n, si potrà fare 3 gruppi uguali se $n = 3p$.
Se $n = 3p+1$, si paragoneranno 2 gruppi di p pezzi e rimarrà un mucchietto di p+1 pezzi.
Se $n = 3p+2$, si paragoneranno 2 gruppi di $p+1$ pezzi e rimarrà un mucchietto di p pezzi.
Così saranno sufficienti **7 pesate** per isolare la moneta falsa fra 2009, sia che, ad ogni tappa, essa si trovi nel mucchietto più grande sia che si trovi nel mucchietto più piccolo.

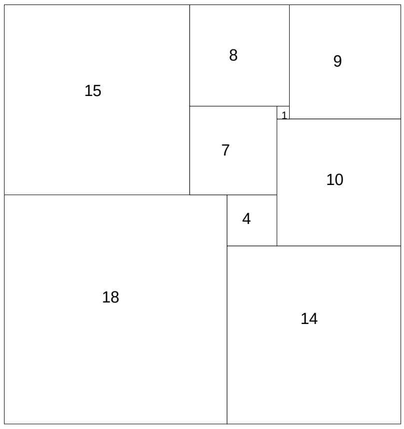
2009 = 670+670+669	670 = 223+223+224		224 = 75+75+74
75 = 25+25+25	25 = 8+8+9	9 = 3+3+3	3 = 1+1+1

Esercizio 6 : **Olio** (5 punti)

8	8	5	5	2	2	7	7	4	4
5	0	0	3	3	5	0	1	1	4
3	0	3	0	3	1	1	0	3	0

8	8	3	3	6	6	1	1	4
5	0	5	2	2	0	5	4	4
3	0	0	3	0	2	2	3	0

Esercizio 7 : **Patchwork** (7 punti)



L'area del rettangolo è uguale alla somma delle aree dei quadrati che lo costituiscono, quindi :
$1^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 = 1056$.
La lunghezza e la larghezza del rettangolo devono essere più grandi del lato del quadrato più grande quindi maggiori di 18 e il loro prodotto deve essere = 1056.
Si deduce che **la sola soluzione è un rettangolo di 32 × 33**.
A partire da queste considerazioni, gli accostamenti che rispettano le condizioni portano al risultato *(per esempio: si trova che 18+14 = 32 e 18+15 = 33 da cui l'idea……)*.

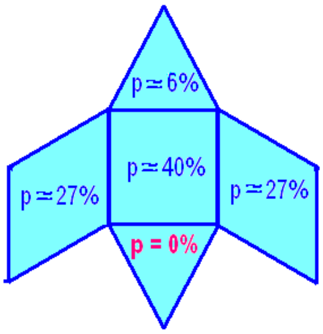
Esercizio 8 : **Saluti e baci** (5 punti)

Sia *a* il numero degli alverniatesi, *b* quello dei bretoni e *c* quello dei catalani.

➔ $\begin{cases} a+b+c=10 \\ 2ab+3bc+2ca=75 \end{cases}$ con *a, b, c,* interi compresi tra 1 e 5

Per sostituzione, la seconda equazione diventa : $bc = 25 - 2a(10 - a)/3$.
I valori 2 e 5 non sono accettabili per *a* perché allora $2a(10 - a)$ non è divisibile per 3.
Con $a = 1$ si ottiene $bc = 19$: non accettabile perché 19 non è il prodotto di due interi compresi fra 1 e 5.
Con $a = 3$ si ottiene $bc = 11$: non accettabile perché 11 non è il prodotto di due interi compresi fra 1 e 5.
Rimane solo $a = 4$; da cui $bc = 9$ e questo impone che $b = c = 3$ e ciò rispetta la condizione $a + b + c = 10$.
L'unica soluzione è pertanto : *a* = 4, *b* = 3 e *c* = 3.

Esercizio 9 : **Pentadado** (7 punti)

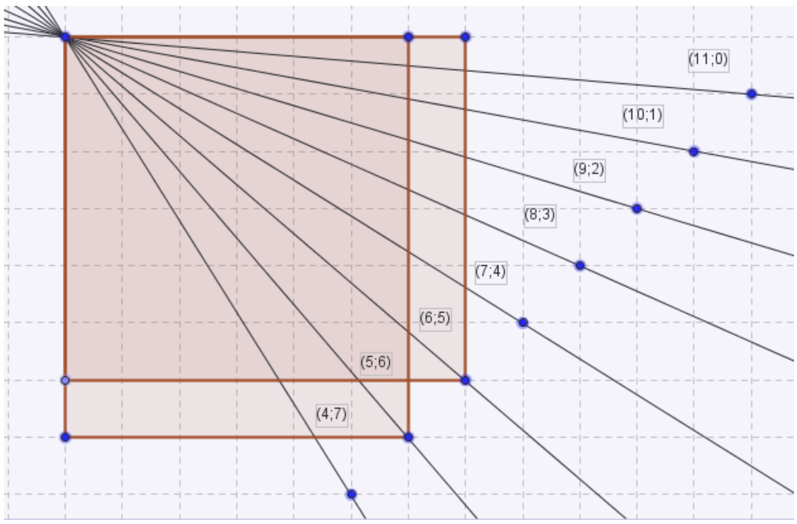


Ecco lo sviluppo di un pentadado.
Su ogni faccia è segnato un valore approssimato della probabilità che il pentadado, una volta lanciato, cada su quella faccia (base)*.
Su 100 lanci, le frequenze osservate possono essere **sensibilmente differenti da questi valori**, ma, se il pentadado è costruito bene, non resterà **mai in equilibrio sulla faccia triangolare di probabilità nulla**, poiché la proiezione ortogonale del baricentro del pentadado cade fuori da questa base.
* *Non conosciamo i valori precisi delle probabilità.*

Esercizio 10 : **In diagonale** (10 punti)

Il numero dei quadrati della stanza è uguale al numero dei quadrati contenuti nel rettangolo delimitato da due nodi moltiplicato per 9.
Fra 2 nodi la diagonale taglia 12 quadrati. Chiamiamo *a* e *b* i rispettivi numeri di intersezione della diagonale con i lati verticali ed orizzontali dei quadrati

1. $a + b = 11$.
2. Qualunque sia la coppia (*a* ; *b*) non esistono nodi intermedi nel rettangolo.
3. Il numero dei quadrati contenuto nel rettangolo è: $(a + 1)(b + 1)$.
4. Le 2 coppie (6 ; 5) e (5 ; 6) generano il numero massimo di quadrati : $\boxed{\textbf{378 quadrati}}$.



Speciale terze

Esercizio 11 : Chaud-Froid (5 punti)

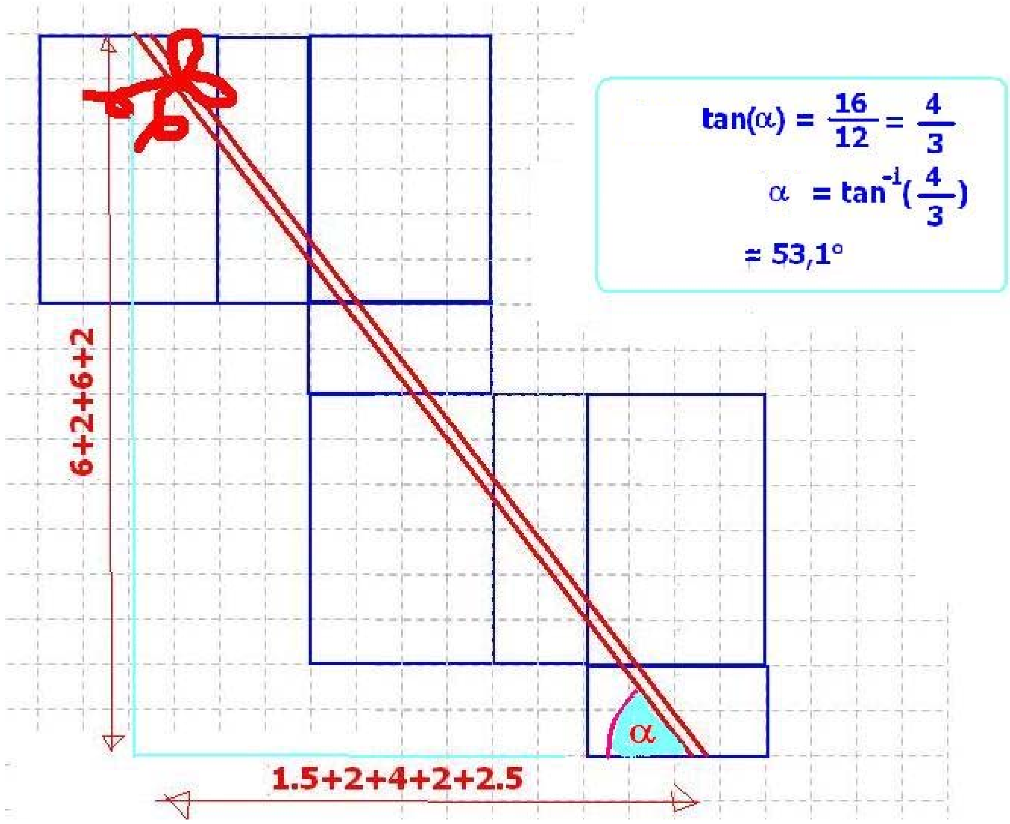
Sia t la durata (in ore) dell'interruzione di corrente. La temperatura del congelatore è aumentata di 0,5°C per ora durante *t* ore e poi è diminuita di 2°C per 1h15m, cioè (1+ ¼)= 1,25h. Si ha dunque l'equazione :
$-18+0,5t-2\times 1,25=-17$.

➔ $0,5t=3,5$ ➔ $t=7$. **L'interruzione è stata di 7h.**

Si può anche partire dalla situazione finale per dedurre che al momento del ritorno della corrente la temperatura era di $-17+2\times 1,25=-14,5$ °C e dunque che il congelatore aveva aumentato la sua temperature di $7\times 0,5=3,5$ °C durante l'interruzione.

Esercizio 12 : Paccoregalo (7 punti)

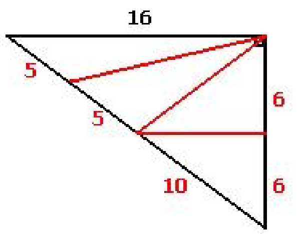
Conservandosi l'angolo α lo sviluppo piano del percorso del nastro è un segmento. Si può allora determinare la misura dell'angolo con calcoli trigonometrici.



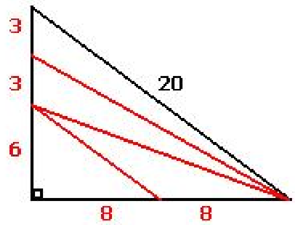
Esercizio 13 : **Zorro è qui!** (10 punti)

Ci sono in tutto 12 modi di ripartire questo triangolo alla maniera di Zorro.

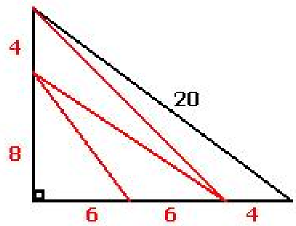
Eccone tre:



Si è diviso il triangolo in due metà con la mediana relativa all'ipotenusa. Si è tagliata nuovamente ciascuna metà in due (quarti) sempre mediante la mediana.



Una variante dell'idea precedente: la prima mediana tracciata non parte dall'angolo retto, ma da uno acuto.



Un altro modo : partendo da un vertice si è congiunto il quarto della base poi il terzo della base del triangolo restante, per finire con una mediana.