Mathématiques SANS Frontières

Ufficio Scolastico per la Lombardia

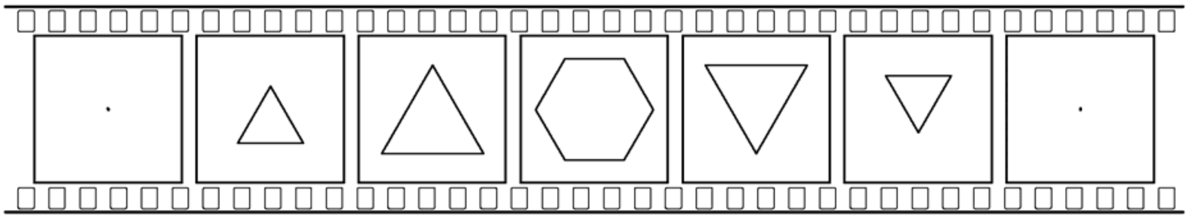
Matematica Senza Frontiere
Competizione 2007/2008
Elementi di soluzione

- Per tutti gli esercizi, esclusi i numeri 2, 3, 4 e 7, sono richieste spiegazioni, giustificazioni o illustrazioni.
- Sarà esaminata ogni risoluzione, anche parziale.
- Si terrà conto dell'accuratezza.
- Ogni foglio-risposta deve essere utilizzato per un singolo esercizio per il quale deve essere riportata una sola soluzione, pena l'annullamento.

Esercizio 1 — (7 punti) Forza,scappiamo!

Sofia e Antonio impiegano rispettivamente 20 e 10 minuti per passare; è quindi chiaro che debbano attraversare insieme il ponte, ma occorre che la lampada "torni indietro" rapidamente. In base a queste considerazioni :
Giulietta e Romano attraversano in 2 minuti
Giulietta ritorna in 1 minuto
Sofia e Antonio passano in 20 minuti
Romano ritorna in 2 minuti
Giulietta e Romano concludono il passaggio in 2 minuti
Totale: 27 minuti (Giulietta e Romano possono scambiarsi)

Esercizio 2 — (5 punti) Un mondo piatto



Il lato dell'esagono è uguale a quello dei triangoli piccoli e metà di quello dei grandi.

Esercizio 3 — (7 punti) Riflessione

Nella figura l'orologio indica 12:00 dunque Rosa si è sbagliata alle ore 11:51
Ecco le possibili soluzioni

Esercizio 4 — (5 punti) Tiro al bersaglio

Il totale dei punti segnati è 243. Ogni arciere ha guadagnato 81 punti.
La sola suddivisione possibile è : $25 + 25 + 25 + 3 + 3 = 81$ per un arciere,
e per gli altri due : 50 + 15 + 9 + 6 + 1 = 81.

Esercizio 5 — (7 punti) Colpi di testa

Il cavaliere può vincere il drago, per esempio, così:

orecchie	**1**	**2**	**1**	**2**	**1**	**0**	**1**
becchi	**2**	**1**	**2**	**1**	**0**	**1**	**0**
gole	**4**	**3**	**2**	**1**	**2**	**1**	**0**

Ci sono tre tipi di draghi a 7 teste che sono invincibili:
quelli (1, 1, 5) – (1, 3, 3) – e naturalmente gli (0, 0, 7)!!

Più in generale, la teoria dei draghi policefali stabilisce che sono invincibili quelli il cui numero di teste delle tre specie ha la stessa parità e certamente quelli del tipo (0, 0, n)

Esercizio 6 — (5 punti) Votazione

Ecco due possibili soluzioni
A) Se il voto di Giulio fosse coinciso con la media, questa non sarebbe cambiata.
Però ha aggiunto un punto con il risultato di aumentare la media di 0,02 punti, cioè di 1/50 di punto. Il suo punto supplementare, allora, è stato diviso per 50 (totale votanti), da cui si deduce che sono 49 le persone che hanno votato prima di lui.

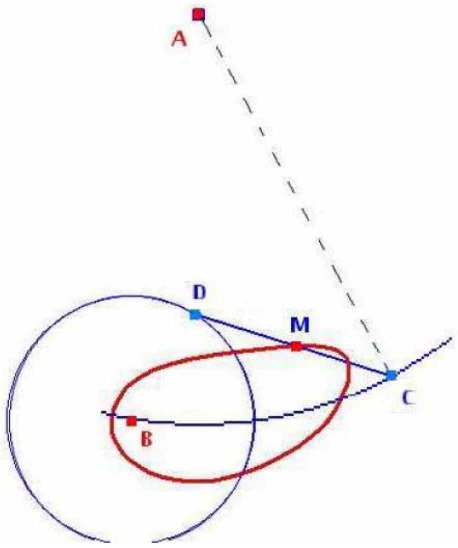
B) Mediante la risoluzione di una equazione.

Sia *M* la media prima del suo voto e *n* il numero di votanti; si ha

$$\frac{nM + (M+1)}{n+1} = M + 0,02$$

da cui si ricava $n = 49$

Esercizio 7 — (7 punti) Una bella sudata



Esercizio 8 — (5 punti) Crescete e moltiplicatevi

Si possono confrontare due o più popolazioni solo ad intervalli di tempo che siano multipli comuni dei loro “periodi”

Ores	6	10	12	24	30
A	8	32	64	4096	32768
B	9		81	6561	59049
C		25			15625

Dopo 24 ore la graduatoria è già ben definita: bisognerebbe infatti attendere 25 ore perché C=3125.

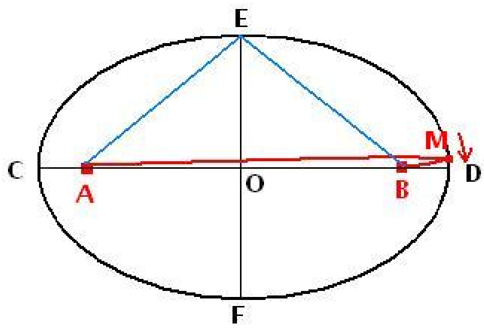
Dopo 30 ore si ha $5^6 < 2^{15} < 3^{10}$

La classifica è allora $\boxed{C < A < B}$.

Attenzione:

Calcolando successivamente $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[5]{5}$ si nota che le popolazioni A, B, C aumentano rispettivamente di circa 41,4%, 44,2% e 38% per ora.

Esercizio 9 — (7 punti) Con lo spago



Siano A e B i paletti, CD e EF gli assi dell’ellisse, O il suo centro, l la lunghezza dello spago e M il punto mobile. Per individuare le dimensioni corrette dell’ellisse bisogna immaginare M in diverse posizioni :

a) Se M è in C o in D, si ha :

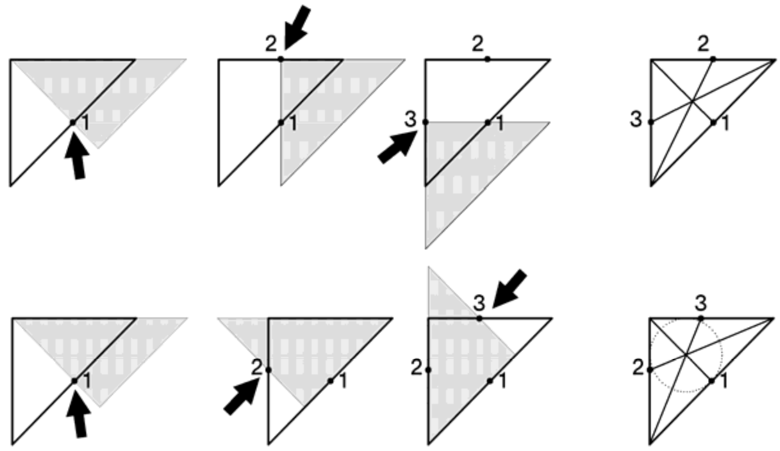
l = 2AC + AB = AB + 2BD ➔ AC = BD e

l = CD ➔ $\boxed{l = 15\text{ m}}$

Se M è in E, si ha AE = $\frac{l}{2}$ = 7,5 m e, sapendo che OE = 4,5 m,

aplicando il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo AOE si ha AO = 6 m ➔ $\boxed{\text{AB = 12 m}}$

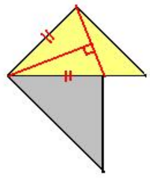
Esercizio 10 — (10 punti) Con la squadra

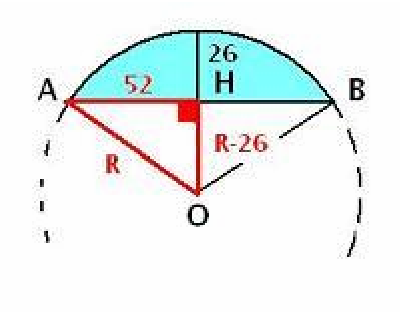


Baricentro
Poiché il triangolo è isoscele, la mediana uscente dall'angolo retto è anche bisettrice (e altezza). Applicando il teorema di Talete si possono ottenere i punti medi degli altri lati, tracciare le mediane e determinare il baricentro.

Incentro
Si devono tracciare le bisettrici degli angoli. Per quella dell'angolo retto si è già visto. Per le altre si può considerare la bisettrice come asse di simmetria dell'angolo.

nota
Ci sono altre soluzioni per queste costruzioni; si può, ad esempio, tracciare una bisettrice come in figura.



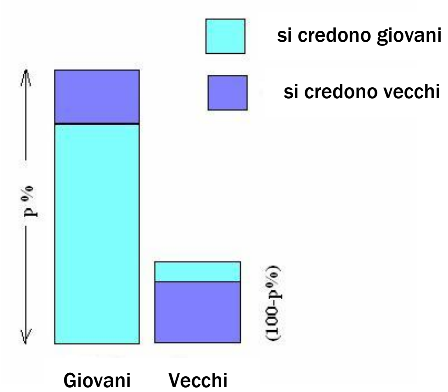


Esercizio 11 — (5 punti) Il vetro rotto

Sia O il centro dell'arco di circonferenza AB e OH l'asse della corda AB. Applicando il teorema di Pitagora nel triangolo rettangolo OHA si ha:

$R^2 = (R - 26)^2 + 52^2$

La soluzione dell'equazione è $\boxed{R = 65 \text{ cm}}$.



Esercizio 12 — (7 punti) Per cento età

Sia p la percentuale dei giovani;

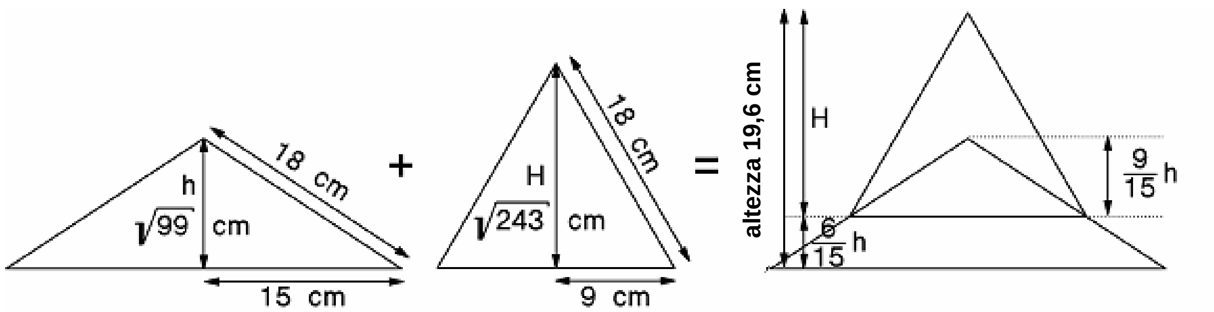
si ha l'equazione

$0{,}2\,p + 0{,}9\,(100 - p) = 34$

la cui soluzione è p = 80%

La popolazione presenta dunque 4 000 giovani

Esercizio 13 — (10 punti) Turlututu



Per ogni cono si ha la relazione

$\frac{\alpha}{360} = \frac{R}{18}$ dove α è l'angolo del settore del disco utilizzato per confezionare il cono e $h^2 = 18^2 - R^2$.

Si ottengono così le dimensioni dei coni.

Per calcolare l'altezza dei coni sovrapposti bisogna applicare ancora il teorema di Talete (fig 3).