Mathématiques Sans Frontières

Ufficio Scolastico per la Lombardia

Matematica Senza Frontiere

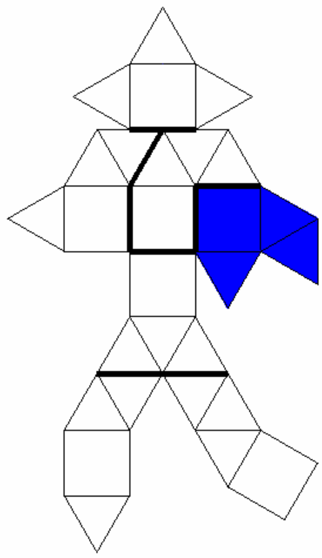
ELEMENTI DI SOLUZIONE DELLA PROVA DI ACCOGLIENZA 2006/07

Esercizio 1 : Mezzo vuoto o mezzo pieno

Basta segnare il livello del liquido: sulla figura esso coincide con la "E" sull'etichetta. Si capovolge la bottiglia per scambiare di posto i due componenti del contenuto: l'aria e il liquido. Se il livello del liquido si trova al di sotto del segno il contenuto di aria è maggiore e quindi la bottiglia contiene meno di ½ litro di liquido, se si trova sopra la bottiglia contiene più di ½ litro.

Esercizio 2 : Tre per uno

La figura fornisce l'unica soluzione.
Il pezzo mancante è quello scuro.



Esercizio 3 : Riciclaggio

Un anno non bisestile è di 365 giorni. **365=52x7+1** .
Il calendario del 2007 sarà sfasato di un giorno rispetto a quello del 2006. Quando un anno è bisestile lo sfasamento è di due giorni a partire dal primo marzo. Così il primo gennaio 2006 era domenica. Nel 2007 è lunedì, nel 2008 martedì, nel 2009 giovedì….., nel 2012 domenica. Ma il 2012 è bisestile, per cui l'agenda potrà essere utilizzata solo fino al 28 febbraio. **Bisognerà aspettare fino al 2017 per trovare un anno non bisestile che cominci con una domenica.**

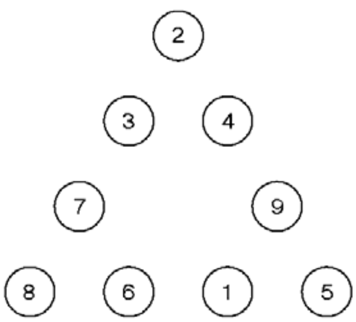
Esercizio 4 : Nov…ità

$$10^{2006}-2006=(10^{2006}-1)-2005=\underbrace{9999...99999}_{2006\text{ cifre }9}-2005=\underbrace{9999...999}_{2002\text{ cifre }9}7994\ .$$

Altro possibile procedimento:
10^{2006}=10000………..0000 -
(2006 cifre 0)
2006 =
99999…997994
(2002 cifre 9)

La somma delle cifre è quindi: 2002x9+7+9+9+4**=18047.**

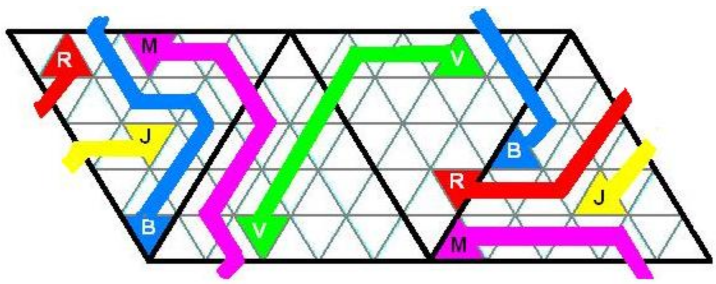
Esercizio 6 : I gettoni di Matilde



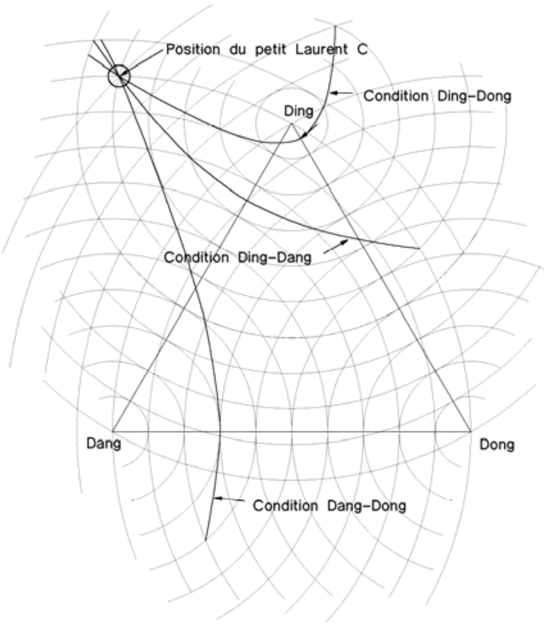
Quella in figura è una possibile soluzione.
Gli altri triangoli-soluzione presentano gli stessi allineamenti (di 4 numeri).

Esercizio 5 : Ognuno per la sua strada

Quella in figura è una possibile soluzione.



Esercizio 7 : Nel cuore della notte

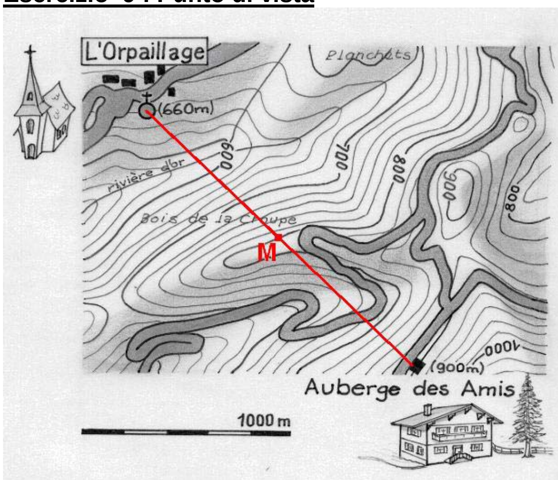


Si può completare la rete di circonferenze abbozzata sulla figura dell'enunciato. **Il piccolo Lorenzo si trova all'intersezione di tre iperboli, molto vicino alle circonferenze Ding+5, Dang+10 e Dong+14 (che si intersecano quasi nello stesso punto).**

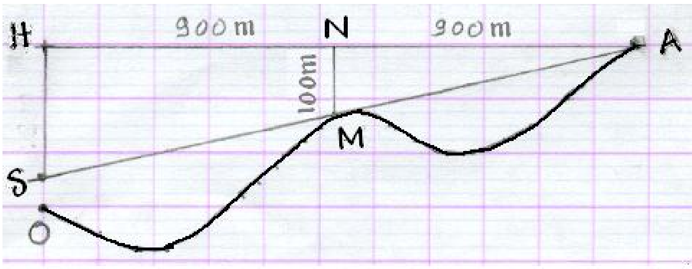
Esercizio 8 : A rovescio

Ecco i 24 numeri che verificano le regole dell'enunciato:
60009; 60809; 66099; 66899; 68089; 68889; 69069; 69869; 80008; 80808; 86098; 86898; 88088; 88888; 89068; 89868; 90006; 90806; 96096; 96896; 98086; 98886; 99066; 99866.

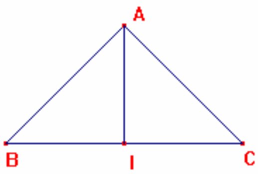
Esercizio 9 : Punto di vista



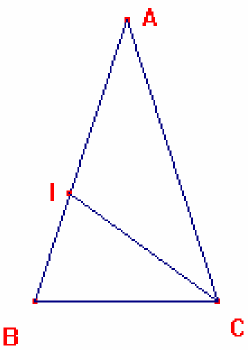
Siano A la posizione dell'osservatore a l'Auberge des amis, M il punto situato nella direzione dello sguardo verso il paese a 800m di altitudine sulla cresta della Croupe, H il punto a 900m di altitudine posizionato sulla verticale della cappella, N il punto a 900m di altitudine posizionato sulla verticale di M, e S l'intersezione della retta AM con la verticale OH della cappella.
Il teorema di Talete o il teorema del punto medio danno: HS=200m. Ma OH=900-660=240m, per cui OS=40m. **Non si può quindi vedere il campanile della cappella di l'Orpaillage dall'Auberge des Amis, a meno che sia più alto di 40m, il che in questa situazione è poco plausibile.**



Esercizio 10 : Triangoli bisosceli



Primo caso: la bisettrice AI esce dal vertice del triangolo isoscele ABC di base BC, i due triangoli BAI e CAI che si formano sono rettangoli e congruenti. Se sono isosceli allora l'angolo BAC misura 90°. **Il triangolo iniziale è rettangolo e isoscele.**



Secondo caso: la bisettrice CI esce dal vertice C del triangolo isoscele ABC di base BC. Se il triangolo ICB è isoscele la sua base deve essere BI. Indicando con α la misura dell'angolo ICB, nel triangolo ICB si ottiene: 5 α=180° e α=36°. Il triangolo isoscele ABC ha i suoi angoli uguali che misurano 72°. L'angolo BAC misura quindi 36° e il triangolo IAC è anch'esso isoscele di base AC; l'angolo AIC misura 108°. **Il secondo triangolo cercato ha il suo angolo al vertice che misura 36°, mentre gli angoli alla base misurano 72°.**

Soluzione alternativa

Indicando con α gli angoli alla base del triangolo bisoscele e con β l'angolo al vertice, ci sono solo questi due casi:

1) $\beta/2 = \alpha$ $\beta = 2\alpha$; $2\alpha + \beta = 180°$, $4\alpha = 180°$, $\alpha = 45°$: triangolo rettangolo isoscele.
2) $\alpha/2 = \beta$ $\alpha = 2\beta$; $2\alpha + \beta = 180°$, $5\beta = 180°$, $\beta = 36°$, $\alpha = 72°$: triangolo aureo.

Esercizio 11 : Somme di quadrati

Sia n il lato del 3° quadrato. I 5 quadrati iniziali hanno perciò rispettivamente area:
$(n-2)^2$, $(n-1)^2$, n^2 , $(n+1)^2$, $(n+2)^2$.

Eguagliando le aree dei due quadrati grandi, si ottiene poi:

$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2$, $n^2-4n+4+n^2-2n+1+n^2=n^2+2n+1+n^2+4n+4$,

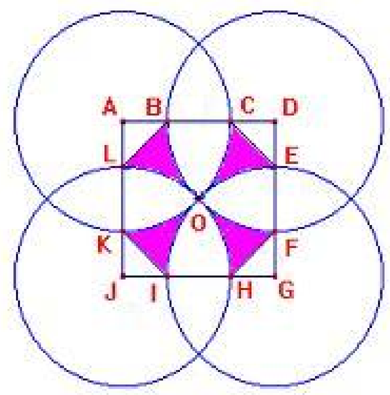
$n^2-12n=0$, poi $n(n-12)=0$. Ma $n>0$, per cui n=12.

Il lato del terzo quadrato è 12.

Esercizio 12 : Problema esistenziale

Se il triangolo esiste allora: (2+x)+(1+2x)>(12-x) e (2+x)+(12-x)>(1+2x). Le soluzioni di questa doppia disequazione sono reali nell'intervallo (2,25 ; 6,5). La disequazione (1+2x)+(12-x)>(2+x) è sempre verificata. Inoltre nell'intervallo (2,25 ; 6,5) i tre numeri (2+x), (1+2x), e (12-x) sono positivi, il che assicura l'esistenza del triangolo.
Le soluzioni sono tutti i numeri reali nell'intervallo (2,25 ; 6,5).

Esercizio13 : Croce di Malta



AO=AC=BD=4√2 e AC+BD=AD+BC. Quindi BC= 8(√2-1).
Il triangolo ABL è rettangolo isoscele, allora AB=AD-BD=8-4√2 e BL=AB√2=8√2-8=BC.Tenendo conto delle simmetrie della figura si ottiene l'uguaglianza degli otto lati dell'ottagono BCEFHIKL. Il triangolo ABL è rettangolo e isoscele, quindi l'angolo ABL misura 45°. Allora l'angolo LBC misura 135°. Nello stesso modo si può dimostrare che tutti gli angoli dell'ottagono misurano 135°.
Questo ottagono ha otto lati e otto angoli uguali, quindi è regolare.