

Soluzioni della prova del 5 marzo 2002

Esercizio 1 : Alibi

Andrea è occupata con Bruce per 3 minuti, poi con Dimitri per 4 minuti, poi al telefono con Camilla per 5 minuti. Ella rimane dunque sola per $15 - (3 + 4 + 5) = 3$ minuti, quindi è innocente.

Bruce è occupato con Andrea per 3 minuti, poi con Dimitri per 3 minuti ; egli è dunque solo per $15 - (3 + 3) = 9$ minuti ma non si conosce la durata della sua e-mail.

Camilla è occupata fino alle 22 h 05 e nei 10 minuti restanti, è al telefono con Andrea per 5 minuti ; dunque è innocente.

Dimitri vede Andrea dopo Bruce cioè dopo le 22 h 03 e prima della telefonata che Andrea riceve da Camilla cioè prima delle 22 h 10 e Dimitri resta 4 minuti da Andrea. Egli arriva dunque da Andrea al più tardi alle 22 h 06, quindi non può aver commesso il crimine prima della sua visita a Andrea; egli lascia Andrea al più presto alle 22 h 07, non ha potuto commettere il crimine dopo la sua visita ad Andrea perché successivamente vede Bruce per 3 minuti.

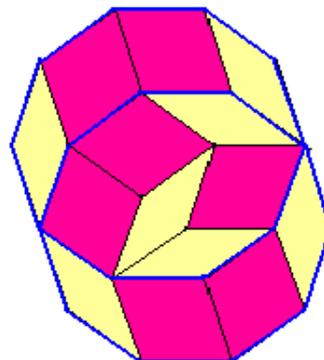
Per eliminazione, **il colpevole è dunque Bruce.**

Esercizio 2 : Un gran dilemma

Una delle possibili strategie consiste nell'attivare i chiavistelli nell'ordine **1 - 2 - 3 - 2 - 1 - 2 - 3.**

Esercizio 3 : Decagomania

Ci sono 6 modi per costruire un decagono con 5 losanghe di ogni tipo. Ecco un esempio di due decagoni parzialmente sovrapposti. Attenzione : i due decagoni possono essere sovrapposti anche tramite una sola losanga con angoli di 144° e 36° .



Esercizio 4 : All'incontrario

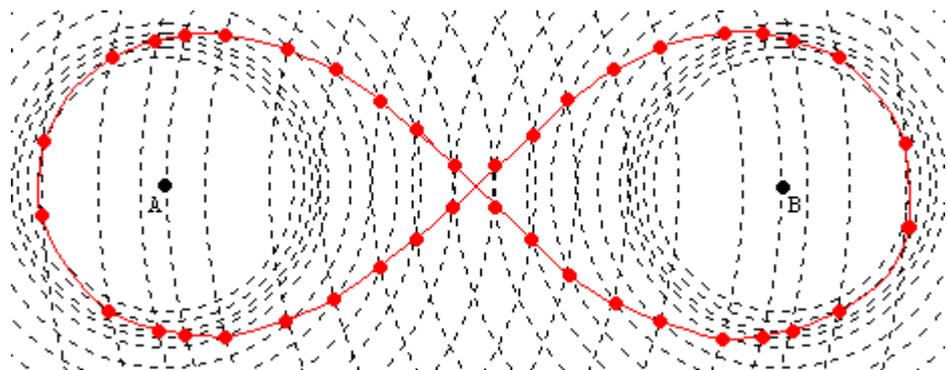
L'unica soluzione è :

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad 7 \quad 8 \\ \times \qquad \qquad 4 \\ \hline 8 \quad 7 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

Exercise 5 : L'aviatrice

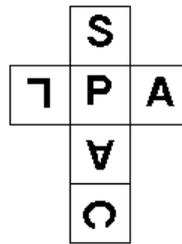
$60 \times 60 = 3600$; $72 \times 50 = 3600$; $90 \times 40 = 3600$; $100 \times 36 = 3600$; $144 \times 25 = 3600$ etc...

Il primo prodotto fornisce il punto medio di AB. Ciascuno degli altri prodotti consente di fissare 4 punti. Bisogna però osservare che l'esistenza di tali punti dipende dalla disuguaglianza triangolare cosicché $20 \times 180 = 3600$ non fornisce nulla. Perseverando si vede apparire **la lemniscata di Bernoulli.**

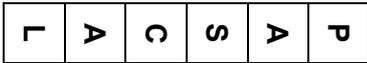


Esercizio 6 : Facce nascoste

Ecco un modello possibile:



e ciò che vede Barbara :



Esercizio 7 : Vasetti pieni

Siano x , y e z le masse rispettivamente del vasetto piccolo, di quello medio e di quello grande. Confrontando il ripiano più alto con quello più basso si constata che la massa di un vaso grande più quella di uno piccolo uguaglia la massa di 8 vasi piccoli. Un vaso grande pesa dunque sette volte uno piccolo :cioè $z = 7x$.

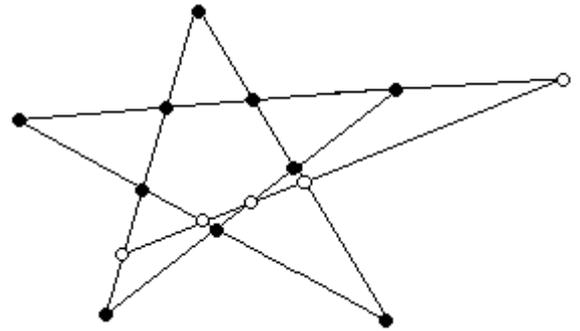
Ogni ripiano sostiene 2,8 kg (un terzo di 8,4 kg), pertanto considerando i primi due ripiani dal basso, si ottiene il seguente sistema :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2,8 \\ 8x + 2y = 2,8 \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} x = 0,2 \\ y = 0,6 \end{cases} \text{ infine } z = 1,4.$$

I vasi hanno massa rispettivamente 0,2 ; 0,6 e 1,4 kg.

Esercizio 8 : Linee europee

Si può partire da un pentagono stellato che si completerà tracciando una retta che taglia ciascuna retta del pentagono.



Esercizio 9 : Ingranaggi dentati

E' sufficiente considerare le ruote A e B, poiché se una ruota avanza di un dente, tutte le altre ruotano di un dente. Se le ruote A e B devono fare ciascuna un numero intero di giri, il numero dei denti che complessivamente ruotano è il minimo comune multiplo di 14 e 18; $\text{mcm}(14;18) = 126$ e $\frac{126}{14} = 9$ e

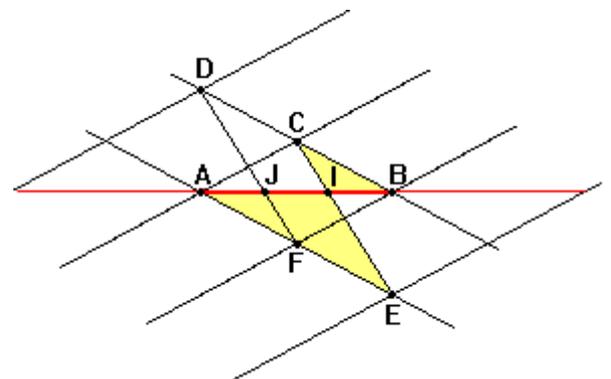
$$\frac{126}{18} = 7.$$

Quindi se **A compie 9 giri allora B ne compie 7.**

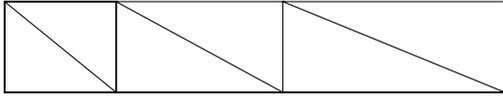
Esercizio 10 : Tutto è in regola

Ci sono più soluzioni; eccone una: i triangoli BIC e AIE sono simili :quindi $\frac{BI}{AI} = \frac{BC}{AE}$; $AE = 2 BC$ quindi $AI = 2 IB$ e **I si**

trova ai 2/ 3 di AB. Nello stesso modo si dimostrerà che **J si trova a 1/ 3 di AB** considerando i triangoli simili AJF e BJD.

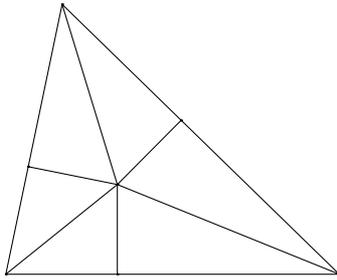


Esercizio 11 : China puzzle



Il triangolo è diviso in 6 triangoli rettangoli simmetrici a due a due. Si dispongono a due a due per formare un rettangolo la cui altezza è il raggio della circonferenza inscritta e la cui base è il semiperimetro del triangolo.

Dalla relazione : $S = R \times \frac{P}{2}$ si ottiene $R = \frac{2S}{P}$.



Esercizio 12 : Il Cambiaeuro

Perché siano possibili 100 operazioni, qualunque sia la banconota introdotta, bisogna partire da: 100 banconote da 50e (al massimo 100 cambi da 100e), 100 da 20e (per cambi unicamente da 100e da 50e), 200 da 10e, 200 da 5e. (e sta per euro)

Una possibile soluzione (proposta dal comitato francese)

	100 e	50 e	20 e	10 e	5 e
Numero iniziale di biglietti	0	100	100	200	200
Biglietti da 100e introdotti	x				
Biglietti resi		x	x	2x	2x
Biglietti da 50e introdotti		y			
Biglietti resi			y	2y	2y
Biglietti da 20e introdotti			z		
Biglietti resi				z	2z
Biglietti da 10e introdotti				t	
Biglietti resi					2t
Totale	x = 20	100+ y-x = 130	100+ z-x-y = 40	200+ t-2x-2y-z = 70	200 -2x-2y-2z-2t = 0
Risolvendo	x = 20	y = 50	z = 10	t = 20	

Sono state introdotte: **20 banconote da 100 e, 50 da 50 e, 10 da 20e , 20 da 10 e.**

Una ulteriore soluzione :

	100	50	20	10	5	risulta
Numero iniziale di biglietti	-----	100	100	200	200	-----
Biglietti da 100e introdotti	20	80	80	160	160	20
Biglietti da 50e introdotti	20	130	30	60	60	50
Biglietti da 20e introdotti	20	130	40	50	40	10
Biglietti da 10e introdotti	20	130	40	70	-----	20

Sono state introdotte: **20 banconote da 100 e, 50 da 50 e, 10 da 20e , 20 da 10 e.**

Esercizio 13 : Non è paccottiglia

Sviluppando la superficie laterale del cono sul piano si ottiene un settore circolare. Su tale settore il cammino più breve da P a P' è il segmento di retta PP' che è la linea di contatto della catenina con il cono.

Il perimetro della base è 21π e la lunghezza della circonferenza di centro S e raggio 35 cm è 70π .

Pertanto $\widehat{PSP'} = 360^\circ \times \frac{21\pi}{70\pi} = 108^\circ$.

La lunghezza della catenina è data da $2 \times 30 \text{ cm} \times \sin(54^\circ)$

- oppure $2 \times 30 \text{ cm} \times \cos(36^\circ)$ - cioè **circa 48,5 cm** (determinata grazie al triangolo rettangolo SHP).

