Matematica Senza Frontiere Junior

Scuola secondaria primo grado – classe terza

Accoglienza 2016 - 2017

Proposta di soluzioni

Esercizio 1 (7 punti) Indoviniamo

Se x è il numero pensato, effettuando la procedura indicata da Giorgio si ottiene 2(x + 3) – 5 cioè 2x + 1; per cui se Marco dichiara di avere ottenuto come risultato 9, Giorgio calcola la metà di 9 - 1 che corrisponde, appunto, a 4.

Esercizio n. 2 (10 punti) Costruzioni

Necessitano 48 cubi di lato 3 cm e 162 di lato 2 cm.

Chiamate x, y e z le tre dimensioni si può scrivere $x : y : z = 1 : 2 : 3$

e tenendo conto delle proprietà delle proporzioni $(x + y + z) : x = (1 + 2 + 3) : 1$ → $x = 6$ $y = 12$ $z = 18$

si deduce che i lati del palazzo misurano 6 cm,12 cm,18 cm.

Esercizio n. 3 (5 punti) Due viandanti

L'esercizio può essere risolto mediante tentativi ragionati che tengano in considerazione sequenze di miglia percorse, giorni di cammino e multipli di 20. Si giunge a determinare che il numero di giorni necessari è 39.

La soluzione di seguito proposta può essere spunto per un successivo approfondimento.
Se indichiamo con x il numero di giorni di cammino la strada percorsa dal primo viandante sarà 20 x, mentre quella del secondo sarà $x(1 + x) / 2$. Quando s'incontrano le due lunghezze risultano uguali, per cui $x(1 + x) / 2 = 20x$.
Risolvendo l'equazione si ottengono le due soluzioni:

$x = 0$ alla partenza

$x = 39$ al loro successivo incontro.

Per valore storico si riporta anche la soluzione fornita dallo stesso Fibonacci:
Togli 1 al doppio di 20 e trovi dopo quanti giorni il secondo viandante raggiungerà il primo. 20 • 2 – 1 = 39

Esercizio n. 4 (7 punti) Non solo quadrati

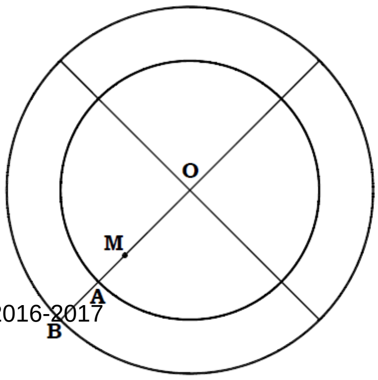
Area dell'esagono di lato CA: $\frac{27}{2}\sqrt{3}$ cm²

Area dell'esagono di lato AB: $24\sqrt{3}$ cm²

Area dell'esagono di lato CB: $\frac{75}{2}\sqrt{3}$ cm²

$\left(\frac{27}{2}\sqrt{3} + 24\sqrt{3}\right)$ cm^2 = $\frac{75}{2}\sqrt{3}$ cm² quindi la proprietà è verificata.

Esercizio n. 5 (10 punti) Con "buona" approssimazione



Prima soluzione

Per tentativi e confronto: disegnata la circonferenza richiesta con raggio di 10 cm e centro O, si disegnano due diametri tra loro perpendicolari e una circonferenza interna anch'essa di centro O e con raggio, per esempio, di 5 cm. In tal modo si evidenziano otto parti. Esse sono equivalenti se l'area del cerchio interno (25 π) è uguale a quella della corona circolare (100 π – 25 π) = 75 π espresse in cm².
In questo caso le parti sono diverse:
(agli effetti del confronto il fattore π si può trascurare) 25/4 = 6,25 e 75/4 = 18,75

Con raggio 6 cm: area interna 36 π e corona circolare (100 - 36)π = 64π.
Confronto delle parti: 36/4 = 9 64/4 = 16

Con raggio 7 cm: area interna 49 π e corona circolare (100 - 49) π = 51 π. Confronto: 49/4 = 12,25 con 51/4 = 12,75
questa è una buona approssimazione.

Seconda soluzione
con raggio x si ha l'equazione $x^2 \pi = (100 - x^2) \pi$ da cui si ottiene x = 7,1 cm (approssimato ai millimetri).

Terza soluzione

Poiché le otto parti devono essere equivalenti, il cerchio di raggio OA è equivalente a ½ del cerchio di raggio OB.
L'area del cerchio di raggio OB è 100π cm²
l'area del cerchio di raggio OA è 50π cm²
da cui raggio OA = 7,1 cm (approssimato ai millimetri)

La circonferenza interna deve quindi aver diametro = 14,2 cm.

Esercizio n. 6 (7 punti) La bella confezione

Occorre considerare gli elementi in gioco, distinguere i vincoli dalle variabili e evidenziare quelle di valutazione soggettiva rispetto a quelle oggettive (determinabili).
Da una prima analisi della situazione prospettata si può stilare il seguente elenco di elementi:

- lunghezza di nastro necessario per il fiocco
- lunghezza del nastro necessario
- dimensioni dell'etichetta
- parte di superficie del coperchio della scatola da lasciare libera per l'etichetta
- somma a disposizione
- qualità del nastro
- gusto di Annamaria per la scelta della qualità del nastro,

dei quali valutare

elementi	vincoli	e. soggettivi	variabili con valore da ipotizzare	variabili determinabili
lunghezza di nastro necessario per il fiocco			x 40 cm ≤ l ≤ 50 cm	
lunghezza del nastro necessario				x
parte di superficie del coperchio della scatola da lasciare libera per l'etichetta			x	
dimensioni dell'etichetta			x di minima per la possibilità di scrivere la dedica leggibile, ad esempio 4 cm ▪ 5 cm	x
somma a disposizione	x 6 euro			
qualità del nastro		X	x con condizione, nel senso che dalla tabella dei costi si può ipotizzare che il miglior costo corrisponda a migliore qualità	
gusto di Annamaria per la scelta della qualità del nastro		X di fatto nel testo del quesito non si fa riferimento a scelta assoluta, ma opportuna	ma anche la qualità non è definibile in assoluto	

Si può iniziare a calcolare l'intervallo di lunghezza del nastro senza fiocco:
L = 2(20 + 12) + 2(10 + 12) cm L = 108 cm
aggiungendo quella del fiocco si ottiene 148 cm ≤ L_T ≤ 158 cm
verosimilmente 150 cm ≤ L_T ≤ 160 cm.
Dato il vincolo, si deve riflettere sul fatto che il costo del nastro al metro non può superare 3,75 €/m se si vuole

abbondare con il fiocco.

Si sarebbe tentati di pensare al risparmio scegliendo il nastro alto 10 cm dal costo di 2 €/m, ma occorre considerare lo spazio d'ingombro per garantire il posizionamento di una etichetta leggibile; riflettendo su ciò si perviene alla conclusione che l'altezza del nastro può essere $h \leq 4$ cm e, quindi, sulla base di tutte le considerazioni effettuate, la scelta opportuna è quella relativa al nastro alto 3 cm.

Nota: interessante sarebbe, in classe, porsi la domanda dell'esistenza o meno di altre scelte valutabili "opportune" a partire da altre ipotesi purché plausibili e congrue con il testo; estensibile il testo del quesito con la richiesta, ad esempio," per poter scegliere il nastro più bello (ammesso che sia identificabile con il più costoso) quali variabili del testo si dovrebbero variare?"

Esercizio n. 7 (10 punti) Quasi Roma - New York

Si considera la relazione di proporzionalità diretta tra lunghezza dell'arco (L) rispetto alla circonferenza del cerchio massimo (C) e dell' ampiezza dell'angolo al centro corrispondente (α) rispetto all'angolo al centro:

$L : \alpha = C : 360°$ oppure $L : \alpha \frac{2\pi}{360°} = C : 2\pi$

da cui $L : C = \alpha : 360°$

Poiché 60° è $\frac{1}{6}$ dell'angolo giro al centro del cerchio C

$L_{AB} = \frac{1}{6} 2\pi \cdot 6\,378{,}39$ km ➔ $\boldsymbol{L_{AB} \approx 6\,676{,}05}$ **km**

Esercizio n. 8 (5 punti) Apparenza

Massimo risponderà: "Contrariamente a ciò che tu pensavi che rispondessi e, cioè, 100, il numero non rimane invariato. Con il 10% in meno di 100 si ottiene 90 e con il 10% in più di 90 si ottiene 99".

o anche: con il 10% in più che corrisponde a 110 e il 10% in meno che corrisponde al 90% di 110 si ottiene 99.

Esercizio n. 9 (10 punti) I commensali

Se y = 1	$6x^2 + 1 = 943$	da cui	$x^2 = 157$	da scartare
Se y = 3	$38x^2 + 9 = 943$	da cui	$x^2 = 934 / 38$	da scartare
Se y = 5	$102x^2 + 25 = 943$	da cui	$x^2 = 918 / 102$	$x^2 = 9$ ➔ $x = 3$

Pertanto si deduce che le matematiche presenti sono 3 e i matematici 5**.**

Esercizio n. 10 (7 punti) Epitaffio

Detta A l'età di morte di Lucio, si ha

$1/6\ A + 1/12\ A + 1/7\ A + 5 + A/2 + 4 = A$

$(14 + 7 + 12 + 42 - 84) \cdot A/84 = - 756/84$

$9 \cdot A = 756 \qquad A = 84$ anni

Di fatto il quesito è mutuato dal cosiddetto epitaffio di Diofanto, matematico di Alessandria, presente nel XIV libro dell'Antologia Palatina e qui di seguito riportato in una delle traduzioni classiche:

«Questa tomba racchiude al suo interno Diofanto. Oh, meraviglia! Essa dice ad arte quanto egli ha vissuto. Dio gli accordò il sesto della sua vita per l'infanzia e aggiunse un dodicesimo perché le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza. Per un settimo fece eziandio brillare per lui la fiamma d'Imene, e dopo cinque anni di matrimonio gli diede un figlio: Ahimè! unico ed infelice bambino, al quale la Parca non concesse di vedere che la metà della vita di suo padre. Durante quattro anni ancora, consolando il suo dolore con lo studio delle cifre, Diofanto raggiunse infine il termine della sua vita».

Nel testo del quesito ci si è permessi di sostituire il termine "infanzia" con "fanciullezza" dato che dai calcoli si ricava che l'età corrispondente sarebbe di 14 anni.