Che cosa è V

Mathématiques Sans Frontières

Ufficio Scolastico per la Lombardia

Matematica Senza Frontiere

Scuola superiore – classi seconde e terze
Accoglienza 2023 – 2024

Proposta di soluzione

Esercizio n. 1 (7 punti) **Famiglia numerosa**

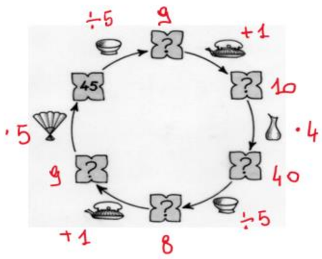
Indicati con *m* il numero dei maschi e con *f* il numero delle femmine, considerando le affermazioni di Paulette e di Justin, si imposta il sistema:

$$\begin{cases} 2(m-1) = f \\ f = m + 2 + 1 \end{cases}$$

da cui *m* = 5 e *f* = 8

Esercizio n. 2 (5 punti) **Operazioni a catena**

I due operatori che si ripetono non possono essere moltiplicazioni perché darebbero origine ad un numero maggiore di 4. Quindi la ciotola è ":5" e la teiera "+1" (lo scambio tra i simboli non è possibile in quanto 46 non è divisibile per 5). Il ventaglio non può essere la moltiplicazione per 4 in quanto 45 non è un suo multiplo:



Esercizio n. 3 (7 punti) **Equivalente**

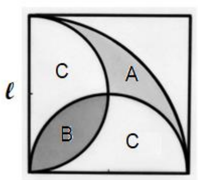
Da un'osservazione della figura, sinteticamente, si considera che:

- C è equivalente alla metà di un quarto di cerchio meno B,

- A è equivalente a un quarto di cerchio meno (2C +B),

da cui si deduce che A è equivalente a B.

Oppure, completando con i calcoli, però non richiesti dal testo,



$A = \frac{1}{4}\pi l^2 - 2C - B$ $\qquad$ $C = \frac{1}{2} \cdot \pi \frac{l^2}{4} - B$

da cui $A = \frac{1}{4}\pi l^2 - 2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \frac{l^2}{4} - B\right) - B$ $\qquad$ $A = \frac{1}{4}\pi l^2 - \pi \frac{l^2}{4} + 2B - B$ $\qquad$ e si ottiene A = B.

Esercizio n. 4 (5 punti) **Cartone di latte**

Una possibile procedura inizia con lo scomporre in fattori i numeri corrispondenti alla misura, in cm^2, di coppie di facce del cartone con un lato in comune:

<table>
<tr><td>105</td><td>3x5x7</td><td rowspan="2">Fattori comuni
3 5 15</td></tr>
<tr><td>60</td><td>2^2x3x5</td></tr>
<tr><td>60</td><td>2^2x3x5</td><td rowspan="2">Fattori comuni
2 3 4 12</td></tr>
<tr><td>252</td><td>2^2x3^2x7</td></tr>
<tr><td>252</td><td>2^2x3^2x7</td><td rowspan="2">Fattori comuni
3 7 21</td></tr>
<tr><td>105</td><td>3x5x7</td></tr>
</table>

Prendendo in considerazione i fattori comuni tra le facce con superfice di 252 cm^2 e 105 cm^2 e quelli tra le facce con superfice di 252 cm^2 e 60 cm^2, gli unici fattori possibili per i lati della faccia con superfice 252 cm^2 sono 12 x 21 = 252.

Da cui si ricava che la profondità del parallelepipedo è pari a 60/12 = 5.

Pertanto le tre misure sono 5 cm, 12 cm e 21 cm.

Il quesito si può anche risolvere impostando un sistema a tre incognite x, y, z con tre equazioni

xy = 60, xz = 105, yz = 252 che risolto fornisce come soluzione:

x = 5 cm, y = 12 cm e z = 21 cm.

Il volume è pertanto di 1 260 cm^3, cioè di 1,26 l.

Approfondimento didattico

In classe si può anche affrontare lo stesso quesito chiedendo di calcolare direttamente il volume senza l'individuazione delle singole dimensioni.

Denominate le aree delle facce S_1, S_2, S_3 si ha $S_1 = xy$, $S_2 = yz$, $S_3 = xz$.

Da cui $S_1 \times S_2 \times S_3 = (xyz)^2$ $V = xyz$ $V = \sqrt{S_1 \times S_2 \times S_3}$ ottenendo $x = \frac{V}{S_2}$ e così via.

Esercizio n. 5 (7 punti) **Leibniz**

1/1
1/2 1/2
1/3 1/6 1/3
1/4 1/12 1/12 1/4
1/5 1/20 1/30 1/20 1/5
1/6 1/30 1/60 1/60 1/30 1/6
1/7 1/42 1/105 1/140 1/105 1/42 1/7
1/168 1/56 1/8

Utilizzando il fatto che una frazione è la somma delle due sottostanti

1= 1/2 +1/3+1/6 3F

1= 1/2+1/4+1/12+1/6 1/2+1/5+1/20+1/12+1/6 5F

1= 1/2+(1/6+1/30)+1/20+1/12+1/6 1/2+1/7+1/42+1/30+1/20+1/12+1/6 7F

1= 1/2+1/5+1/20+1/12+1/6=1/2+1/5+1/30+1/60+1/12+1/6 1/2+1/5+1/30+1/105+1/140 +1/12+1/6 7F

Approfondimento

Vedasi nell'aggiornamento di dicembre 2023 della sezione **Per la didattica** una estensione effettuata dall'amico dell'equipe di Strasburgo Pierre Huber.

Esercizio n. 6 (5 punti) **Decifrate!**

Si consideri la terna xy9, si avrà x+y = 11 e le altre terne possibili potranno essere solamente y9x e 9yx

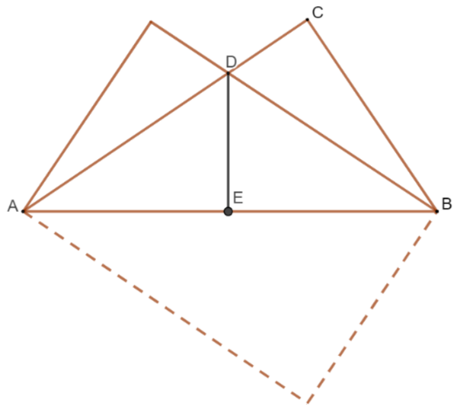
Di conseguenza ogni terna contente le cifre x e y dovrà anche contenere il 9

9	x	y	9	x	y	9	x	y	9	x	7		

Considerata la terna 9x7, si deduce che x = 4 e di conseguenza y = 7

9	4	7	9	4	7	9	4	7	9	4	7	9	4

Esercizio n. 7 (7 punti) **Area-igami**



L'area richiesta si può calcolare come

- somma di metà dell'area del rettangolo e del triangolo BCD,

oppure come

- differenza tra l'area del rettangolo (150 cm^2) e l'area del triangolo ABD che è il doppio del triangolo ADE.

Per costruzione si sa che AC =15 cm e BC = 10 cm

I triangoli ADE e ABC sono simili essendo triangoli rettangoli con un angolo in comune (CAB) per cui è possibile scrivere la seguente relazione

$$\frac{Area(ADE)}{Area(ABC)} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2$$ dove AE^2 = $\frac{325}{4}$ cm^2

essendo $AE^2 = \frac{AC^2+BC^2}{4}$

$Area(ABD) = 150 \cdot \left(\frac{AE}{AC}\right)^2$ per cui $Area(ABD) = 2\frac{15\cdot 10}{2}\cdot\frac{\frac{325}{4}}{225}$ cm^2

$$Area(ABD) = \frac{325}{6} \text{ cm}^2$$

$Area\ richiesta = \left(150 - \frac{325}{6}\right)$ cm^2 ~ 95,8 cm^2

Esercizio n. 8 (5 punti) **Al cubo**

Alcune possibilità:

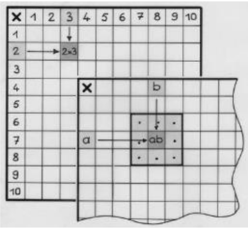
7	8	3
7^3=343	8^3=512	3^3 = 27
$3^3+4^3+3^3$=118	$5^3+1^3+2^3$=134	2^3+7^3=351
$1^3+1^3+8^3$=514	$1^3+3^3+4^3$=92	$3^3+5^3+1^3$=153
$5^3+1^3+4^3$=190	9^3+2^3=737	
1^3+ 9^3 = 730	$7^3+3^3+7^3$ =713	
7^3+3^3=370	$7^3+1^3+3^3$= 371 numero già individuato nell'esempio	
Il numero successivo sarà identico al precedente; le cifre, infatti, della somma sono le basi degli addendi.		

Approfondimento

Un approfondimento possibile è una riflessione sui numeri di Armostrong che sono quattro, tutti di tre cifre: 153, 370, 371, 407.

Vedasi nell'aggiornamento di dicembre 2023 della sezione **Per la didattica** un lavoro effettuato dall'equipe di Strasburgo su questi numeri.

Esercizio n. 9 (7 punti) **A tavola!**



Dalla lettura del testo alla scrittura formale si ottiene:

(a-1)(b-1+b+b+1)+a(b-1+b+1)+(a+1)(b-1+b+b+1) = 8ab

Con la somma membro a membro delle due equazioni (a-1)(b-1) = 72 e (a+1)(b+1) = 130 si ottiene 2ab+2 = 202 da cui ab = 100.

Sottraendo membro a membro si ottiene a + b = 29.

Si possono, quindi, ricavare a = 25 e b = 4 (o la coppia simmetrica).

x	b-1	b	b+1
a-1	**72**		
a			
a+1			**130**

Approfondimento didattico

A)

Per la seconda richiesta si può procedere anche per tentativi ragionati sull'estratto della tavola pitagorica.

Cercando opportuni fattori presenti nella scomposizione di 72 e 130 si evidenzino i valori da inserire nella tabella tali che

(a-1)(b-1) = 72 (a+1)(b+1) = 130

72 = 2 x 36
3 x 24
4 x 18
6 x 12
8 x 9

130 =2 x 65
5 x 26
10 x 13

x	3	b	5
24	**72**		
a			
26			**130**

Possiamo allora completare la tabella ponendo **a = 25** e **b = 4** oppure **a = 4** e **b = 25**

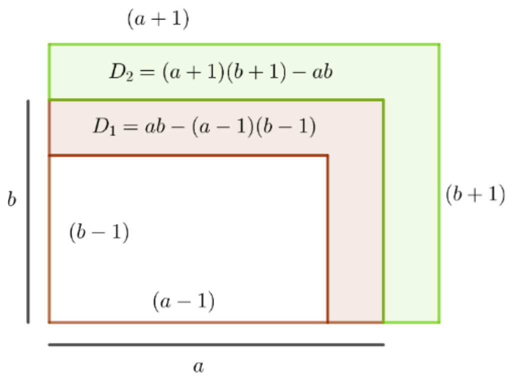
Nota: Sono richiesti solo i valori di a, b e del prodotto ab.

x	3	4	5
24	**72**	**96**	**120**
25	**75**	**100**	**125**
26	**78**	**104**	**130**

x	24	25	26
3	**72**	**75**	**78**
4	**96**	**100**	**104**
5	**120**	**125**	**130**

B)

La relazione tra i vari prodotti può essere visualizzata come segue:



Si ricava che $D_1 < \frac{130-72}{2} < D_2$ $D_2 - D_1 = 2$

E, poiché $D_1 < 29 < D_2$ ne segue che D1 = 28 e che, essendo ab = 72+28, ab = 100

ciò riconduce alla prima soluzione, ma la visualizzazione geometrica della situazione può suggerire il calcolo da effettuare tanto più se si pensa che, abitualmente, gli studenti non scelgano il metodo di riduzione.

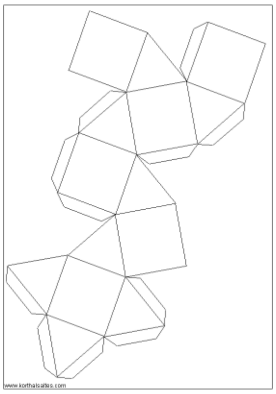
Esercizio n. 10 (10 punti) **Il cubo cambia faccia**

Vertici	12	Sono i punti medi degli spigoli del cubo
Spigoli	24	Sono gli spigoli delle basi delle piramidi
Facce	14	Facce del cubo + basi delle piramidi

Utile rievocare o, cogliere l'occasione in classe, di considerare la formula di Eulero: f + v – s = 2

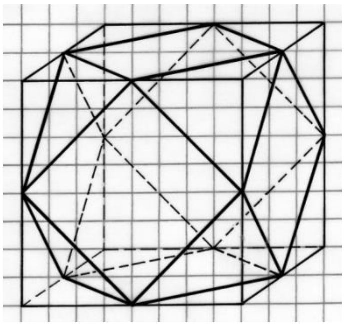
Approfondimento

Il cubo che ha cambiato faccia è diventato un cubottaedro
il cui sviluppo è



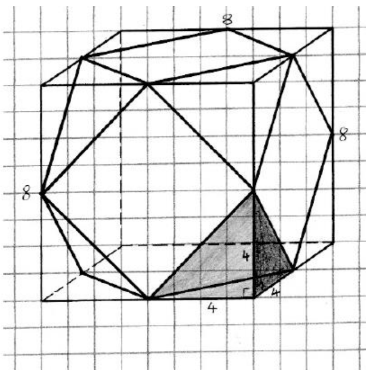
Nota: le immagini sono state riportate dal sito PAPER MODELS OF POLYHEDRA.

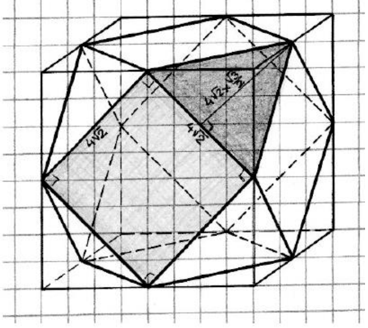
Ciò premesso, in classe come sviluppo il docente potrebbe richiedere la raffigurazione del poliedro ottenuto (come schizzo o come disegno in collaborazione con il collega del settore nei corsi dove la disciplina è prevista) e il volume dello stesso che è il volume del cubo a cui si sottrae otto volte quello di una delle piramidi descritte oppure la superficie laterale.



Il volume richiesto è la differenza tra il volume del cubo e la somma dei volumi delle piramidi. Si ipotizza la misura dello spigolo del cubo l = 8 cm.

Si consideri, con riferimento alla figura del testo, la piramide annerita:





Il volume della piramide è quindi $\frac{1}{3}\cdot 8cm^2 \cdot 4cm = \frac{32}{3}cm^3$.

E' ora possibile calcolare il volume richiesto:

$512cm^3 - 8\cdot\frac{32}{3}cm^3 = \frac{1280}{3}cm^3 \sim 426{,}7cm^3$.

Mentre la superficie laterale misura S = $(6 \times 32 + 8\times 8\sqrt{3})$ cm^2 ~ 302,85 cm^2

Utile sottolineare che ogni cubo di spigolo 4 cm contiene 6 volte il volume di una di queste piramidi d'angolo; cosìccome nel cubo di spigolo 8 cm vi sono 8 cubi di spigolo 4 cm, cioè 6 x 8 = 48 piramidi.

Dunque, il cubottaedro è composto di 48 - 8 = 40 piramidi.

Speciale terze

Esercizio n. 11 (5 punti) **AutotuA**

Il successivo numero palindromo è 16061 e, quindi, l'autista ha percorso 110 km.

Ragione per cui la velocità media è stata di $\frac{110\ km}{1,25h} = 88\frac{km}{h}$

Esercizio n. 12 (7 punti) **Giardino esotico**

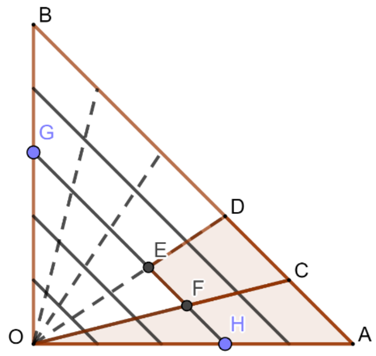
S'indica con a e b i lati dei rettangoli con $a \geq b$ e si ha che

$$\begin{cases} 2a + 2b = 20 \\ 3a + (a - b) = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases}$$

L'area del viottolo lastricato misura $6(6 \cdot 4)\ m^2 = 144\ m^2$ per cui l'area sterrata misura

(400 -144) m^2, cioè, 256 m^2.

Esercizio n. 13 (10 punti) **Le ali del mulino**



Il triangolo ABO è diviso dai segmenti uscenti da O in 5 triangoli equivalenti: per tutti la base è AB/5 e l'altezza quella del triangolo OAB

Area CDEF = Area OCD – Area OFE

Per il calcolo dell'aerea di OFE è sufficiente osservare che i segmenti con estremi su OA e OB sono paralleli ad AB e che i triangoli OFE e OCD sono simili con rapporto di similitudine 3/5 e quindi Area OFE è i 9/25 Area OCD

Area OCD = 2,5 m^2 → Area OFE= 0,9 m^2 → Area FCDE = 1,6 m^2

Area totale = 4 (2,5 + 2,5 -0,9) m^2 per cui Area totale = 16,4 m^2

Soluzione alternativa

I trapezi con le basi su HG e AB sono equivalenti avendo le basi e le altezze congruenti quindi l'area di un'ala è 1/5 dell'area del trapezio HABG.

Area HABG = Area OAB – Area OHG

Area HABG = Area OAB – 9/25 Area OAB

16/25 (Area OAB) = 8 m^2 → Area FCDE = 1,6 m^2.