Ufficio Scolastico per la Lombardia

Scuola superiore – classi seconde e terze

Competizione 7 marzo 2023

Proposta di soluzioni

Esercizio n. 1 (7 punti) **Decorazione di una vetrata**

Vari possono essere gli approcci; se ne riportano alcuni.

1) $A_B = \pi \cdot (2r)^2 cm^2 - (4 \cdot \pi r^2 - 400) cm^2 = 400\ cm^2$.

Oppure

2) Denominato r il raggio dei cerchi interni, il raggio del cerchio esterno è R = 2r
Si considera, per semplicità un solo quadrante.
Area di un quadrante cerchio esterno: $\frac{1}{4}A = \frac{1}{4}\pi(2r)^2$

Area di uno spicchio verde: Area settore circolare – area triangolo rettangolo = $2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot r \cdot r \cdot \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right)$

L'area di tutta la zona verde è quindi $4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot r \cdot r \cdot \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\right) = 400$, da cui $r^2 = \frac{200}{\pi - 2}$

Allora l'area della zona blu di un quadrante è data da:

$$\frac{1}{4}A_B = \frac{1}{4}\pi \cdot (2r)^2 - \left(\frac{1}{2}\pi r^2 + r^2\right) \text{ da cui } \frac{1}{4}\pi \cdot 4 \cdot \frac{200}{\pi - 2} - \left(\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{200}{\pi - 2} + \frac{200}{\pi - 2}\right) = \frac{\pi - 2}{2} \cdot \frac{200}{\pi - 2}$$

e, quindi, $A_B = 4 \cdot 100 = 400\ cm^2$.

Oppure

3) Denominato r il raggio del cerchio del rosone, si procede calcolando, in funzione di r, l'area delle superfici colorate in blu e in verde per sottrazione di aree di figure geometriche facilmente riconoscibili:

$A_V = 8\left(\frac{1}{4}\pi\frac{r^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{4}\right)$ $\qquad$ $A_V = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

$A_B = 4\left(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}\right)$ $\qquad$ $A_B = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

Dall'uguaglianza di A_V e A_B si deduce che $A_B = 400\ cm^2$.

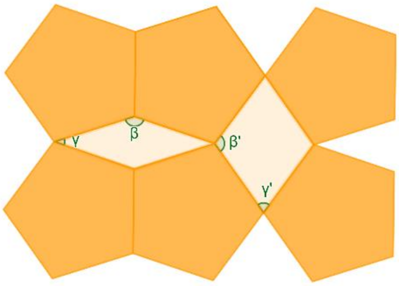
Esercizio n. 2 (5 punti) **La crisi cambia le abitudini di spesa?**

	Cambiamento abitudini		
Discount	si	no	totali
sì	325	25	350
no	50	100	150
totali	375	125	500

1) P = 350/500
2) N = 50
3) P = 25/350
4) P = 100/500

La risposta è SI perché 20% > 15%

Esercizio n. 3 (7 punti) **Pavimentazione**



In via preliminare è necessario calcolare l'ampiezza α dell'angolo interno di un pentagono regolare. Si trova:

$$\alpha = \frac{3 \times 180°}{5} = 108°.$$

Si ponga attenzione alla mattonella romboidale che in figura è disegnata con la diagonale maggiore in posizione orizzontale. Se s'indica con β l'angolo ottuso di questo rombo, si ha:

$$\beta + 2\,\alpha = 360° \quad \text{da cui segue:} \quad \beta = 144°.$$

L'ampiezza dell'angolo acuto di questo rombo è di conseguenza:

$$\gamma = 180° - \beta = 36°.$$

A questo punto concentrandosi sull'angolo ottuso dell'altro rombo l'ampiezza β' è tale per cui risulta:

$$\beta' + \gamma + 2\,\alpha = 360° \quad \text{da cui segue:} \quad \beta' = 108°.$$

L'ampiezza dell'angolo acuto di quest'altro rombo è di conseguenza:

$$\gamma' = 180° - \beta' = 72°.$$

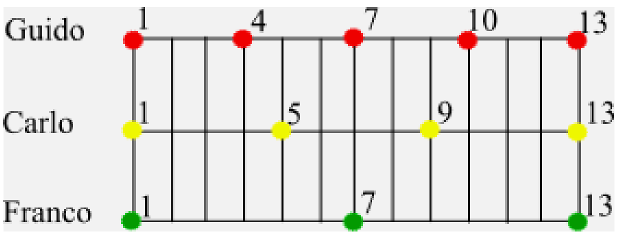
Approfondimento didattico

Si rimanda alla lettura dell'articolo di Antonino Giambò "Un problema di pavimentazione" pubblicato il 26/07/2021 sulla rivista online MATMEDIA.IT

Esercizio n. 4 (5 punti) **Cene in compagnia**

a) È sufficiente calcolare il minimo comune multiplo dei numeri 3, 4, 6.
Stabilito che questo è 12, l'evento si verificherà 12 giorni dopo il 1° agosto, cioè il 13 agosto.

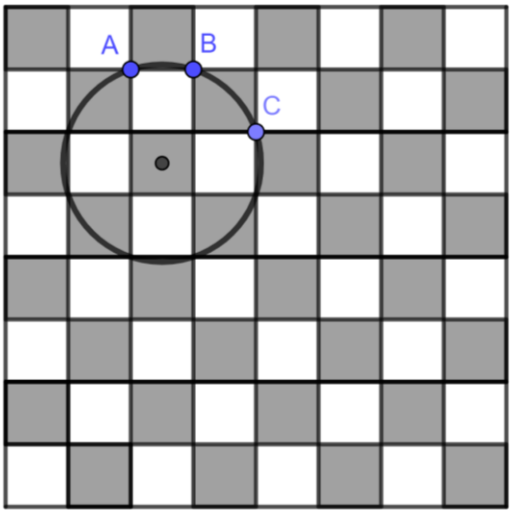
Se, tuttavia, non si riesce a prevedere questo ragionamento, si può seguire quello descritto nello schema sottostante che si spiega da sé:



b) Per rispondere a questo quesito, può ancora essere utile lo schema raffigurato osservando che nell'unico giorno in cui sono presenti sia il pallino rosso sia quello giallo è anche presente quello verde.

Col primo ragionamento, invece, si conclude rapidamente che non esiste un tale giorno. Considerato, infatti, che i multipli comuni a 3 e 4 sono multipli di 12 e quindi anche di 6.

Esercizio n. 5 (7 punti) **Una circonferenza su una scacchiera**



C'è sempre la possibilità di disegnare una circonferenza inscritta in una casa nera.

Un arco di circonferenza per passare interamente su case nere non può attraversare i lati delle case ma solo i loro vertici. Si può trattare di vertici consecutivi o vertici opposti di una casa.

Consideriamo il primo caso con la figura a lato.

Si dispone la punta di un compasso al centro di un opportuno quadrato nero e si apre il compasso in modo che la circonferenza tracciata passi per i vertici opposti di una casa nera e per due vertici consecutivi di un'altra.

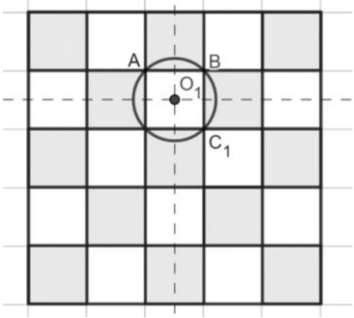
La punta traccerà la circonferenza più grande possibile passante solo per le case nere.

Per individuare il raggio si applica il teorema di Pitagora, chiamati O il centro della circonferenza e H il punto medio di AB.

$OB^2 = OH^2 + HB^2$ quindi $r^2 = (3^2 + 1^2)\ cm^2$ $r = \sqrt{10}$ cm.

Non ci sono altre circonferenze di raggio maggiore che abbiano questa proprietà perché se il raggio OB fosse maggiore automaticamente cadrebbe in una casa bianca.

La seconda possibilità, nella figura sotto, si ottiene con due vertici consecutivi di una casa.



A, B e C_1 individuano una circonferenza che ha come centro il punto di intersezione degli assi di AB e di BC_1, centro in una casa bianca e diametro coincidente con la diagonale della casa, quindi $r = \sqrt{2}$ cm.

Queste, a meno di congruenze, le circonferenze possibili, quindi la circonferenza richiesta ha centro in una casa nera e $r = \sqrt{10}$ cm.

Esercizio n. 6 (5 punti) **Gli orecchini variegati**

a) La probabilità che il secondo orecchino estratto non abbia lo stesso disegno del primo è 8/9. Dopo due orecchini estratti, la probabilità che il terzo orecchino estratto sia dello stesso disegno del primo è 1/8. Quindi la probabilità che, non il secondo, ma il terzo orecchino estratto abbia lo stesso disegno del primo è la seguente, per il principio delle probabilità composte:

$$p = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{9}.$$

Esattamente come la probabilità che sia il secondo orecchino estratto ad avere la stessa probabilità del primo.

b) Esistono due modi di risolvere questo quesito: uno basato sul principio delle probabilità composte, un altro sul calcolo combinatorio.

Primo modo. Nel cassetto ci sono 10 orecchini, di cui 2 col cuore. La probabilità che il 1° orecchino estratto abbia disegnato un cuore è 2/10. A questo punto, posto che il 1° orecchino estratto abbia disegnato un cuore, nel cassetto rimangono 9 orecchini di cui uno solo ha disegnato un cuore. La probabilità che il secondo orecchino estratto abbia disegnato un cuore è 1/9.

Di conseguenza, la probabilità che i due orecchini estratti abbiano entrambi disegnato un cuore, per il principio delle probabilità composte, è la seguente:

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}.$$

Secondo modo a 2 a 2 (il numero degli orecchini estratti), ossia: $N = \binom{10}{2} = 45$. Una sola di queste combinazioni è favorevole all'evento (orecchino con cuore - orecchino con cuore). Per cui la probabilità cercata è P=1/45.

Esercizio n. 7 (7 punti) A precious equation

1) 1 698,96 :1 748,5 5 = 100 : x   x ~ 102,92 Marco, quindi, non vende perché 2,92% < 3%
2) (1 698,96+…. +1 748,55) : 11~1 710,50 > 1 700 Luigi, quindi, non acquista.
3) Annamaria deduce che, poiché il coefficiente angolare della retta rappresentata dall'equazione è positivo, il trend nel breve periodo è crescente.

A livello di previsione d'acquisto o di vendita, non avendo Annamaria esplicitato le sue condizioni per decidere, ma un criterio di riferimento, è corretto solo formulare un'ipotesi: per non rischiare che, successivamente, il trend s'inverta, cioè cali, ad Annamaria converrebbe vendere.

Nota per il docente: la correzione in classe potrà essere l'occasione per richiamare l'attenzione sull'importanza della matematica per la comprensione di fenomeni reali e, anche, per far riflettere sulla differenza tra dati in sé e peso dell'interpretazione soggettiva.

L'equazione è ricavabile anche con una calcolatrice scientifica che, oltre alla retta interpolante i dati, fornisce altre informazioni, ad esempio su media, variabilità, correlazione ecc. In particolare, per le classi terze di indirizzi di studi specifici, risulterà opportuno approfondire introducendo, ad esempio, il metodo dei minimi quadrati.

Esercizio n. 8 (5 punti) Prato e fiori

Si considera che AOD e BCO sono uguali e s'indica con **a** la misura in m^2 di ognuna delle due aree.

Dal triangolo BCD si ricava che i due triangoli DOC e BOC hanno la stessa altezza ➔ 32/a = DO/OB per lo stesso motivo dal triangolo DAB si ricava a/50 = DO/OB e, pertanto,

➔32/a = a/50 ➔a^2 = 32x50 ➔ a = 40

Le parti da piantumare a portulaca misurano complessivamente **80 m^2**.

Esercizio n. 9 (7 punti) Dobble fai da te anche con n simboli

a) Per semplicità indichiamo i simboli con le lettere dell'alfabeto.
Supponiamo di avere una carta con tre simboli (A, B, C); una seconda carta dovrà avere un simbolo della prima (per esempio A) e due simboli nuovi (D, E); una terza carta dovrà avere un simbolo in comune con la prima che non sia stato usato già due volte (per esempio B), un simbolo della seconda carta (per esempio D) e un nuovo simbolo (F). Resta un'ultima carta che avrà i simboli C, E, F.
In sintesi:

- prima carta: A, B, C
- seconda carta: A, D, E
- terza carta: B, D, F
- quarta carta: C, E, F

Quindi **4 carte** e **6 simboli**.

b) Si ottiene ragionando come nel punto precedente:

- prima carta: A, B, C, D
- seconda carta: A, E, F, G
- terza carta: B, E, H, I
- quarta carta: C, F, H, J
- quinta carta: D, G, I, J

Quindi **5 carte** e **10 simboli**.

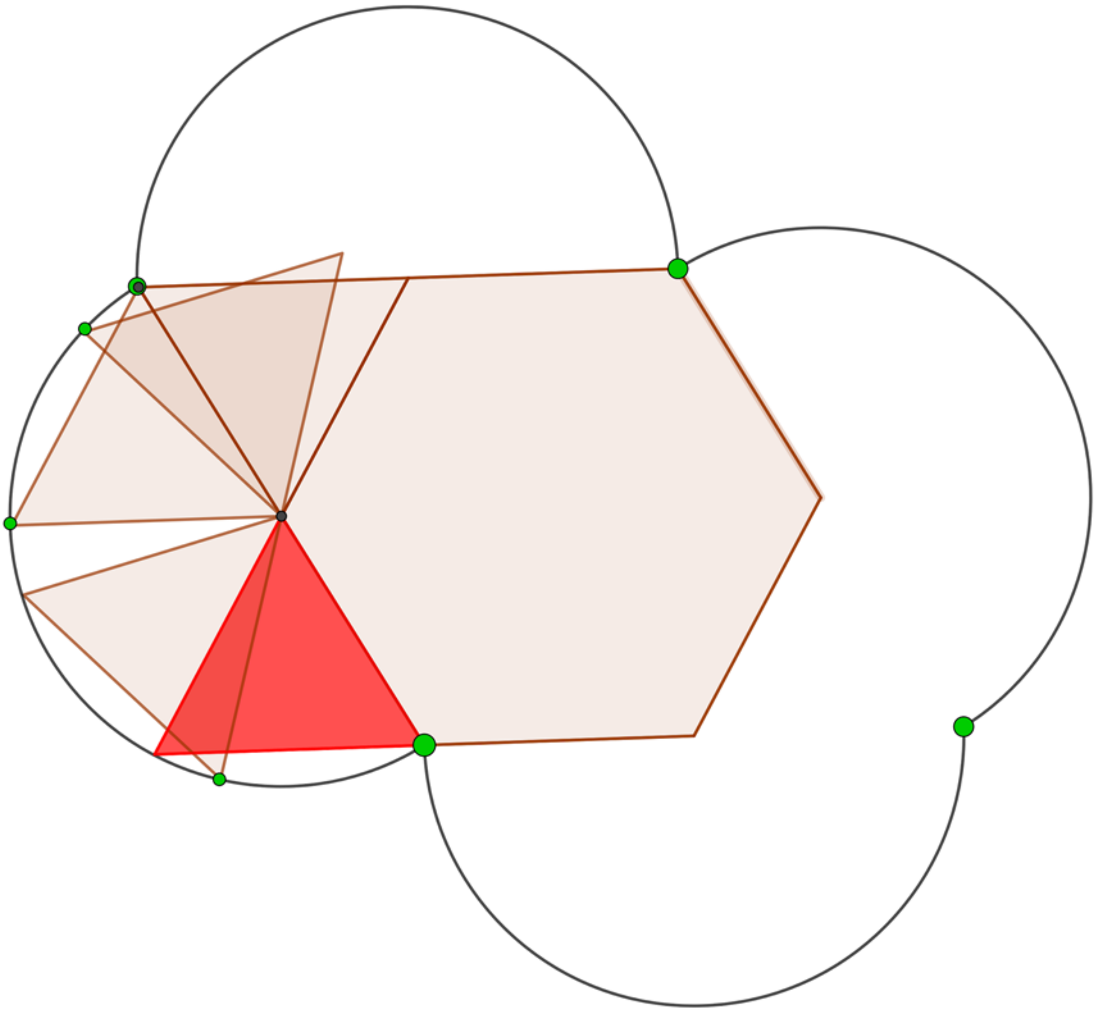
c) Si può generalizzare il discorso fatto in precedenza, osservando che, a partire dalla seconda carta in poi, è necessario riutilizzare un simbolo per ciascuna delle carte precedenti e "completare" la carta con simboli nuovi, arrivando a un totale di *n* simboli; l'ultima carta (la n+1 esima) sarà composta da simboli già usati sulle altre carte.
Si ottiene così la seguente tabella:

Carta	Numero di simboli che compaiono sulle precedenti carte	Numero di simboli che compaiono per la prima volta
1	0	n
2	1	n - 1
3	2	n - 2
…		
n	n - 1	1
n + 1	n	0

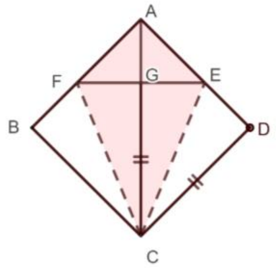
In conclusione le carte sono $n + 1$ e il numero di simboli è dato dalla somma dei primi *n* numeri, cioè $\frac{n(n+1)}{2}$.

Esercizio n. 10 (10 punti) **Tracce**

Il percorso è la somma della lunghezza di 4 semicirconferenze di raggio pari al lato dell’esagono per cui ha lunghezza pari a 40·π cm.



Speciale terze



Esercizio n. 11 (5 punti) **Origami di base**

Con riferimento alla figura a fianco, il quadrilatero AECF ha le diagonali tra loro perpendicolari, per cui la sua area può essere calcolata con:

$$Area = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{EF}}{2}$$

AC è la diagonale del quadrato, quindi misura $\sqrt{2}\ell$.

Per determinare la misura di EF si può osservare che $\overline{CG} = \overline{CD}$ e che il triangolo AEF è rettangolo e isoscele in A.

Pertanto $\overline{EF} = 2\overline{AG}$ $\quad \overline{EF} = 2(\overline{AC} - \overline{CG})$ $\quad \overline{EF} = 2l\left(\sqrt{2} - 1\right)$ e, se si sostituisce nella formula dell'area $\left[\frac{2l\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot l\sqrt{2}}{2}\right]$, si ottiene che questa misura $\left(2 - \sqrt{2}\right)\ell^2$.

Oppure:

osservato che il triangolo AEF è rettangolo e isoscele in A, è possibile impostare il sistema:

$$\begin{cases} x + y = \ell \\ 2x = \sqrt{2}y \end{cases}$$

dal quale si ottiene $\overline{EF} = 2x$ $\quad \overline{EF} = \frac{2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\ell$ $\quad \overline{EF} = \sqrt{2}(2 - \sqrt{2})\ell$ e, se si sostituisce nella formula dell'area, si ottiene che questa misura $\left(2 - \sqrt{2}\right)\ell^2$.

Esercizio n. 12 (7 punti) **Per la festa di fine estate**

Parte a)

Posto $\overline{HK} = x$ Limiti geometrici: $\boxed{0 < x < 10\ u}$

Area cerchio di base: $A = \pi \cdot \overline{HB}^2$ $\qquad A = \pi(10x - x^2)$

Volume del Cono: $V = \frac{1}{3}\pi(10x - x^2)(10 - x)$

Equazione risolvente: $\frac{1}{3}\pi(10x - x^2)(10 - x) = 27\pi$

$$x^3 - 20x^2 + 100x - 81 = 0$$

Detto $P(x)$ il polinomio da annullare, si ottiene che:

$$P(1) = 1 - 20 + 100 - 81 = 0$$

Mediante la regola di Ruffini:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 19x + 81)$$

Da cui:

$$x_1 = 1\ ;\ x_{2,3} = \frac{19 \mp \sqrt{37}}{2}$$

$$x_2 = \frac{19 - \sqrt{37}}{2}$$

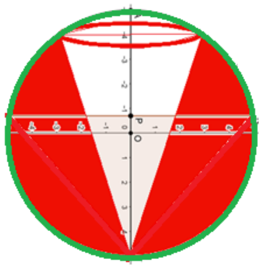
$$x_3 = \frac{19 + \sqrt{37}}{2} > 10\ (non\ accettabile)$$

Le misure dell'altezza possibile sono due:

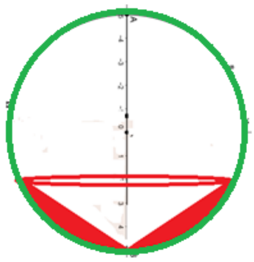
$x_1 = 1u$ $\quad ; \quad$ $x_2 = \frac{19-\sqrt{37}}{2}$ ≈ 6,45 u

ma l'altezza per la calotta più conveniente in modo che il contenitore mantenga più polpa è **x = 1 u**.

L' altro caso comporta che si debba togliere una calotta di altezza 6,45 u e quindi la perdita di più di mezzo cocomero! In entrambi i casi il cocomero va appoggiato in una zuppiera per servirlo.



la calotta da togliere ha altezza 1u



la calotta da togliere ha altezza **≈ 6,45 u**

Parte b)

Per il problema di Gabriella è proponibile come unità 4 cm, compatibile con un cocomero di diametro 40 cm; in tal caso, infatti, il volume di gelato risulterebbe di circa 5 426 cm^3, equivalente a 5,426 litri e di peso pari a circa 3,100 Kg, massa di gelato congrua per 10 persone.

In economia il cocomero potrebbe avere un diametro minimo di 30 cm e……..

Esercizio n. 13 (10 punti) Il Borgorosso F. C.

Il fatto che la squadra si sia classificata terza, alla fine del campionato, è un dato del tutto irrilevante.

a) Indicata con x la media punti a partita nelle 33 partite successive alle prime 5 e indicato con N' il numero di punti conquistati in queste 33 gare, si ha evidentemente:

$$x = \frac{N'}{33}, \quad \text{per cui:} \quad N' = 33\,x.$$

D'altro canto, il numero di punti conquistati complessivamente nelle 38 partite, ricordando che nelle prime 5 la squadra ne aveva conquistato solo 1, è: $N = N' + 1 = 33\,x + 1$.

$$\text{Pertanto, essendo } \frac{N}{38} = 2, \ \text{ risulta: } \ \frac{33\,x + 1}{38} = 2, \ \text{ da cui segue: } \ x \approx 2{,}27\,.$$

Ma, anche, più semplicemente

38 • 2 = 76 numero totale di punti realizzati

76 – 1= 75 punti realizzati in 33 partite

75/33 ≈ 2,27.

b) Si provi un ragionamento che permetta di trovare tutte le possibili situazioni. Al riguardo si indica con V il numero delle partite vinte dalla squadra del Borgorosso F. C., con P il numero di quelle pareggiate e con S il numero delle sconfitte. Considerato che la squadra, a fine campionato, ha totalizzato 76 punti $(N = 38 \times 2 = 76)$, deve risultare:

$$3\,V + P = 76, \quad \text{ovvero:} \quad P = 76 - 3\,V\,.$$

D'altro canto, siccome nelle prime 5 gare il Borgorosso F. C. aveva subito 4 sconfitte, deve essere:

$$V + P \leq 38 - 4, \quad \text{ossia:} \quad P \leq 34 - V\,.$$

Deve dunque essere soddisfatta la seguente condizione:

$$76 - 3\,V \leq 34 - V, \quad \text{da cui segue:} \quad V \geq 21\,.$$

Dalla relazione 3V+P=76 segue poi 3V≤76 e perciò V≤25,3. In conclusione, tenendo presente che V è un numero intero, deve essere:

$$\mathbf{21 \leq V \leq 25}\,.$$

Questo ci dice che le situazioni teoriche possibili sono in numero di 5 e la tabella sottostante le riassume:

V = numero vittorie	P = numero pareggi = 76 – 3 V	S = numero sconfitte = = 38 – (V+P)	Totale partite disputate = V + P + S	Punti conquistati = = 3 V + P
21	13	4	38	76
22	10	6	38	76
23	7	8	38	76
24	4	10	38	76
25	1	12	38	76

S'intende che l'alunno possa segnalare come soluzione due qualsiasi delle situazioni descritte ma con debita spiegazione. Meglio ancora ovviamente con il ragionamento appena descritto.