Elementi di soluzione della competizione del 13 marzo 2003

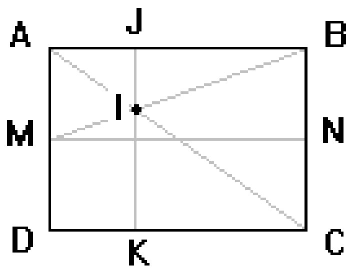
<u>Esercizio 1 : Pausa caffè</u>

La cosa più semplice è mettere tutte le monete in comune.
Si dispone quindi di: **1€ + 50 ct + 3× 20 ct + 2×10 ct + 2× 5 ct**
Si comincia con l'ottenere 2 caffè introducendo 2 × (20 ct + 10 ct + 5 ct).
Si ottiene il terzo caffé introducendo 50 ct.
La macchina rende 10 ct + 5 ct. Si danno 5 ct a Daniela e 10 ct a Bernardo.
Si ottiene il quarto caffé introducendo 1€; la macchina rende 0,65 € nel solo modo possibile: 50 ct + 10 ct + 5 ct . Si danno 5 ct a Claudia, ancora 10 ct a Bernardo e ad Alberto 50 ct più i 20 ct non utilizzati.
Allora ciascuno ha il suo caffè e il suo resto.

<u>Esercizio 2 : Avanti un altro!</u>

L'unica soluzione è **6+7+8+9+10 = 40** .
Non si chiede di dimostrare perché è l'unica.

<u>Esercizio 3 : Chi fa da sè ….fa in tre</u>

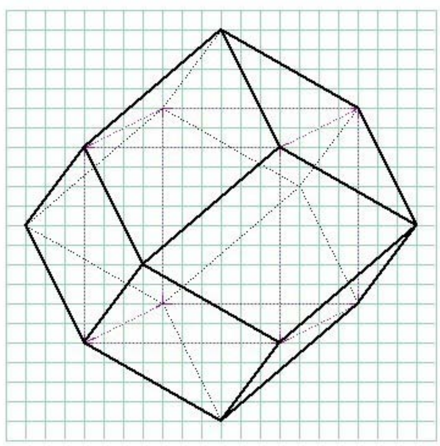


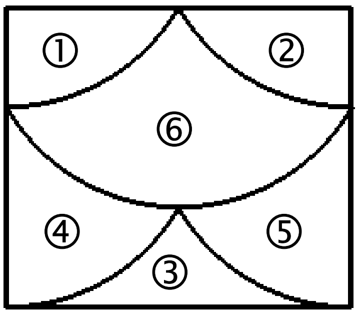
Denominando i punti come in figura :
Nei triangoli AIM e CIB,
per il teorema di Talete : AI/IC = AM/CB = 1/2
Quindi IC = 2 AI e AC = 3AI
Nei triangoli AIJ e ACB, per il teorema di Talete si ha :

AJ = 1/3 AB

<u>nota</u> <u>: c'è anche una soluzione analitica</u>
DC=a, BC=b
retta per AC $y = -(b/a)x + b$
retta per MN $y = b/2$
retta per MB $y = (b/2a)x + b/2$
intersecando AC con MB si ottiene:
$-(b/a)x + b = (b/2a)x + b/2$ da cui $x = a/3$.

<u>Esercizio 4 : A rombi</u>





Esercizio 5 : Non è π

Ecco il rettangolo:
La base è $6 \times \sqrt{3}$ cm
L'altezza è $1{,}5 \times 6 = 9$ cm

Da cui l'area è : $\boxed{54\sqrt{3}\ \text{cm}^2}$

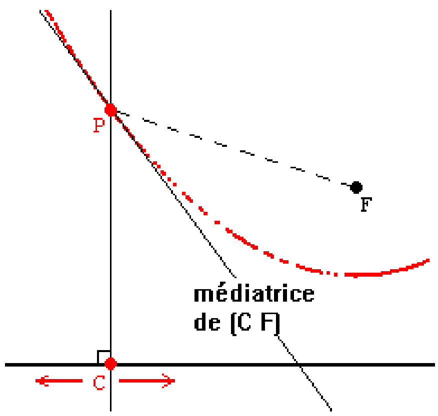
Esercizio 6 : Alla conquista dell'undici

La soluzione è **9876524130** .

Per calcolarla si nota in partenza che 9876543210 non è multiplo di11,
perché $9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 5$, poi si modifica il meno possibile, partendo dalla destra… e buon lavoro!

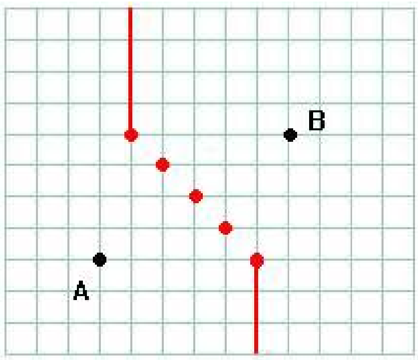
Esercizio7 : Alle corde

Da un lato **PF = 14 – DP** perché la cordicella è tesa
e dall'altro **PC = 14 – DP** perché i punti D, P e C sono allineati
Da cui **PF = PC**
Questa uguaglianza può essere utilizzata per il grafico; P si trova sull'asse del segmento CF

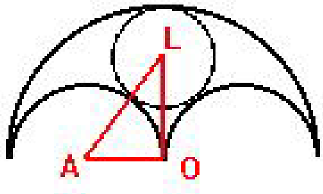


Esercizio 8 : Geometria poliziesca

In questa geometria si ottiene uno strano asse costituito da due semirette e tre punti isolati



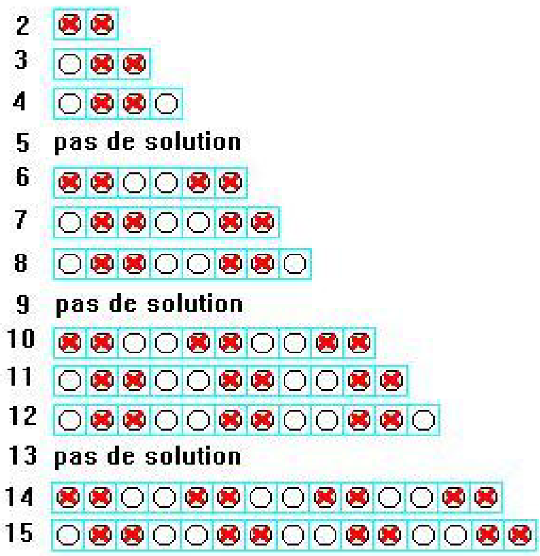
Esercizio 9 : Quadrante lunare



Il disco lunare è tangente alle 3 semicirconferenze. Sia R il suo raggio. Allora, nel triangolo AOL :
OA = ½ ; AL = ½ + R e OL = 1 – R.
Questo triangolo,essendo rettangolo, per ragioni di simmetria col teorema di Pitagora ci dà:
$(½ + R)^2 = (½)^2 + (1\text{-}R)^2$

da cui $\boxed{\mathbf{R = 1/3}}$

Esercizio 10: Tasto nero - tasto bianco



Sembra che gli allineamenti che non hanno soluzione siano quelli con un numero di gettoni pari a 4n + 1,
ma è assai difficile dimostrarlo.

Al contrario è più facile stabilire che l'allineamento di 2 003 gettoni può essere rivoltato: si inizia da sinistra, si rivoltano i primi 2 000 gettoni a gruppi di 4 secondo la soluzione della linea 4, poi si girano gli ultimi 3 secondo la soluzione della linea 3.

Esercizio 11 : I viaggi ringiovaniscono

La formula $T_A = T_B \times \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ fornisce $20 = 40 \times \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ quindi $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = ½$

cioè : $1 - v^2 / c^2 = \frac{1}{4}$ e $v^2 = 3/4\ c^2$.

Pertanto : $\boxed{\mathbf{v = c\sqrt{3}\ / 2}}$ cioè circa **260 000 km/s.**

Esercizio 12 : Partita di bocce

Se denominiamo **a** lo spigolo del cubo, la sua diagonale maggiore è $\mathbf{a}\ \sqrt{\mathbf{3}}$, che è anche uguale al diametro della boccia, quindi:

$$a = 74 / \sqrt{\mathbf{3}} = 74\ \sqrt{\mathbf{3}}\ / 3$$

Il diametro della circonferenza uguaglia la diagonale delle facce del cubo, vale a dire:

$$d = a \times \sqrt{\mathbf{2}}$$
$$= 74 \times \sqrt{\mathbf{6}} / 3$$

Allora il raggio di queste circonferenze è in millimetri :

$$\boxed{\mathbf{R = \frac{37\sqrt{6}}{3}}}$$

Esercizio 13 : Quadratura

Chiamiamo L_n la serie delle basi e l_n quelle delle altezze.

$L_0 = 9$, $l_0 = 3$

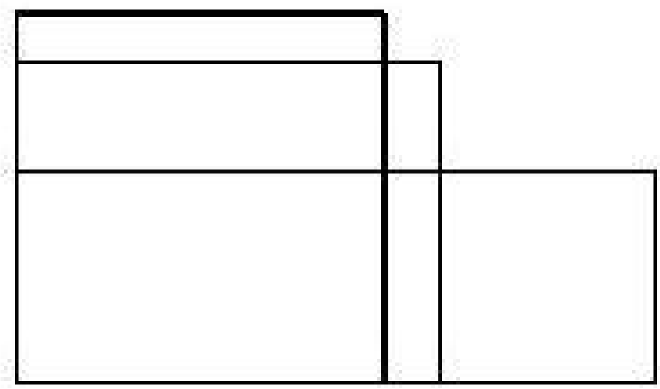
Quindi l'area del primo rettangolo è 9 × 3 = 27.

Allora

$$L_1 = \frac{9+3}{2} = 6 \qquad l_1 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$L_2 = \frac{6+\frac{9}{2}}{2} = \frac{21}{4} = 5{,}25 \qquad l_2 = \frac{27}{\frac{21}{4}} = \frac{36}{7} = 5{,}1428......$$

$$L_3 = \frac{\frac{21}{4}+\frac{36}{7}}{2} = \frac{291}{56} = 5{,}1964..... \qquad l_3 = \frac{27}{\frac{291}{56}} = \frac{504}{97} = 5{,}1958...$$



Gli ultimi due rettangoli sono quasi uguali.
Il rettangolo si avvicina rapidamente a un quadrato.
La base e l'altezza si avvicinano ad un valore comune che sarà il lato di questo quadrato, cioè $\sqrt{27}$.

La calcolatrice ci dà: $\sqrt{27} = 3\sqrt{3} = 5{,}1961....$