Matematica del gioco e Gioco della matematica: dalle immagini di ieri alle idee di oggi

Ferdinando Arzarello
Dipt. Matematica
Università di Torino

"[…] non vi è molta differenza fra il piacere provato da un dilettante nel risolvere un abile rompicapo ed il piacere che un matematico prova nel dominare un problema più difficile. Entrambi guardano alla bellezza pura, quell'ordine limpido, nettamente definito, misterioso, estasiante che permea tutte le strutture."

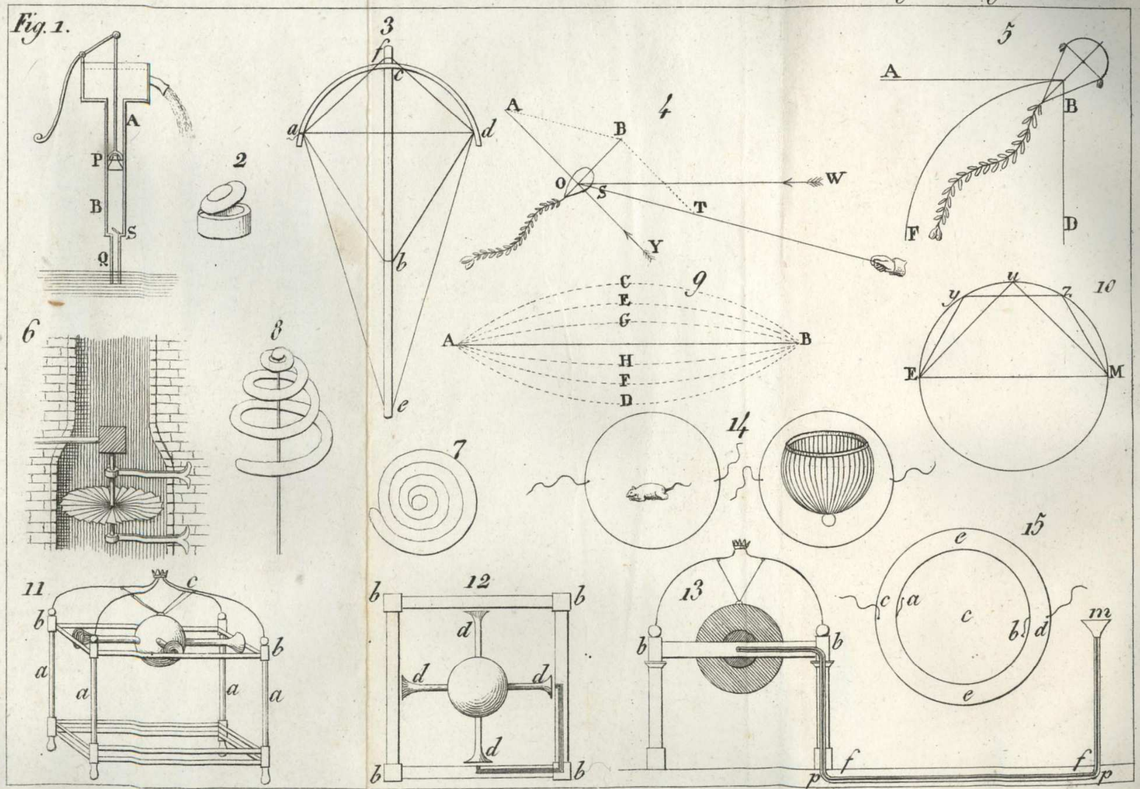
(M. Gardner, *Enigmi e Giochi Matematici*).

Oggi vedremo alcuni esempi che, partendo del suggestivo sfondo fornito dal materiale d’antan esposto al *Museo della scuola e del libro per l’infanzia*, ci condurranno in un cammino attraverso il gioco sia come fonte di problemi matematici intriganti sia come oggetto di studio matematico.

Questo itinerario ci farà entrare in un settore nuovo della matematica, profondamente intrecciato con la scienza economica e oggi oggetto di molte importanti ricerche.


Pompeo Vagliani
Direttore del Museo della Scuola
e del Libro per l'Infanzia


SRDCE
THE HEART OF BOYHOOD



LA SCIENZA
INSEGNATA
COL MEZZO DE' GIUOCHI

OSSIA

RAGIONE SCIENTIFICA

DI MOLTI GIUOCHI GENERALMENTE USATI

OPERETTA

Istruttiva e dilettevole di un Inglese professore di Matematica, la quale può meritare l' attenzione di ogni classe d' uomini e favorire la buona educazione de' ragazzi.

PRIMA TRADUZIONE ITALIANA

DI GIUSEPPE BELLONI

ANTICO MILITARE ITALIANO.

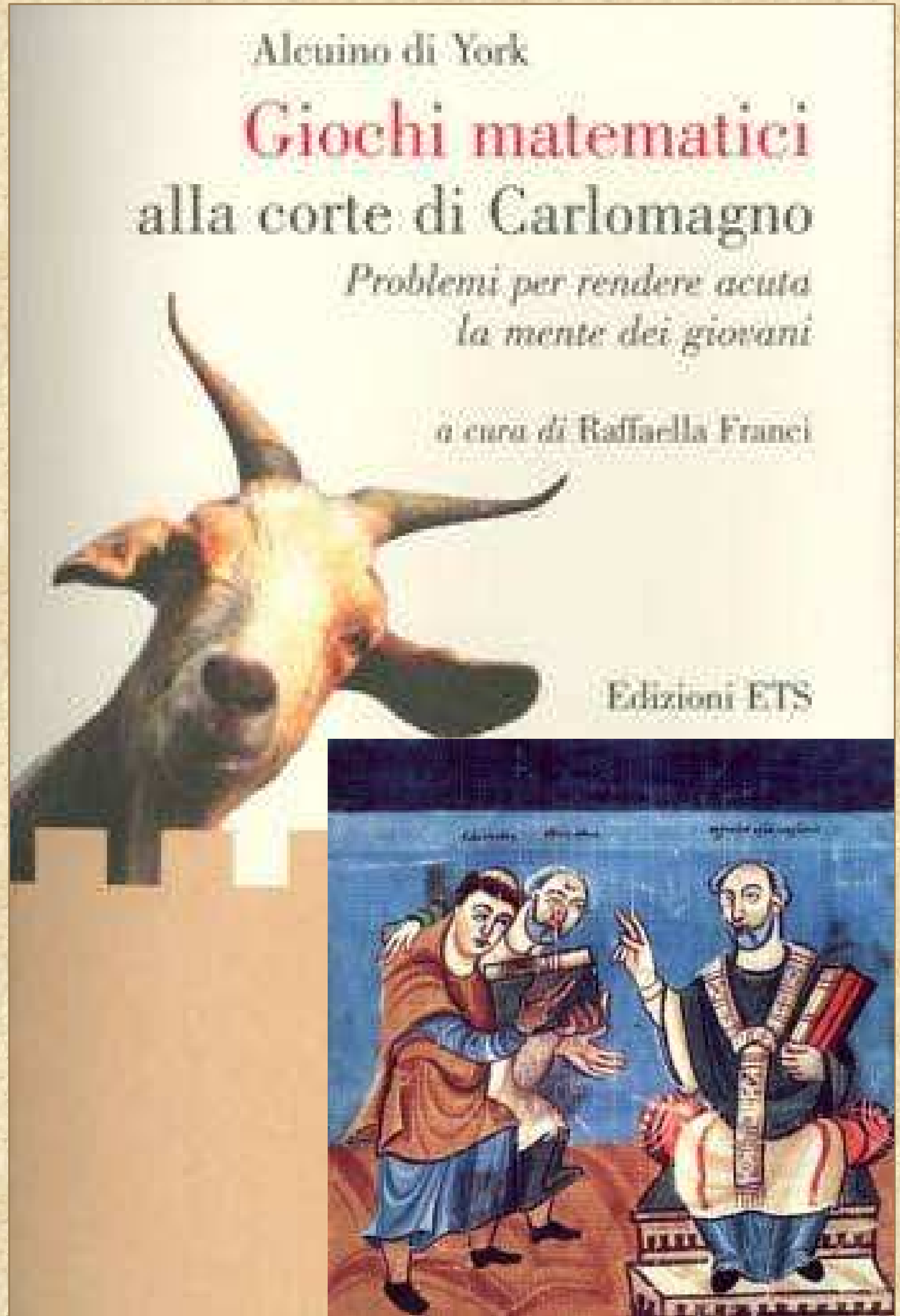
CON RAMI.

VOL. SECONDO.

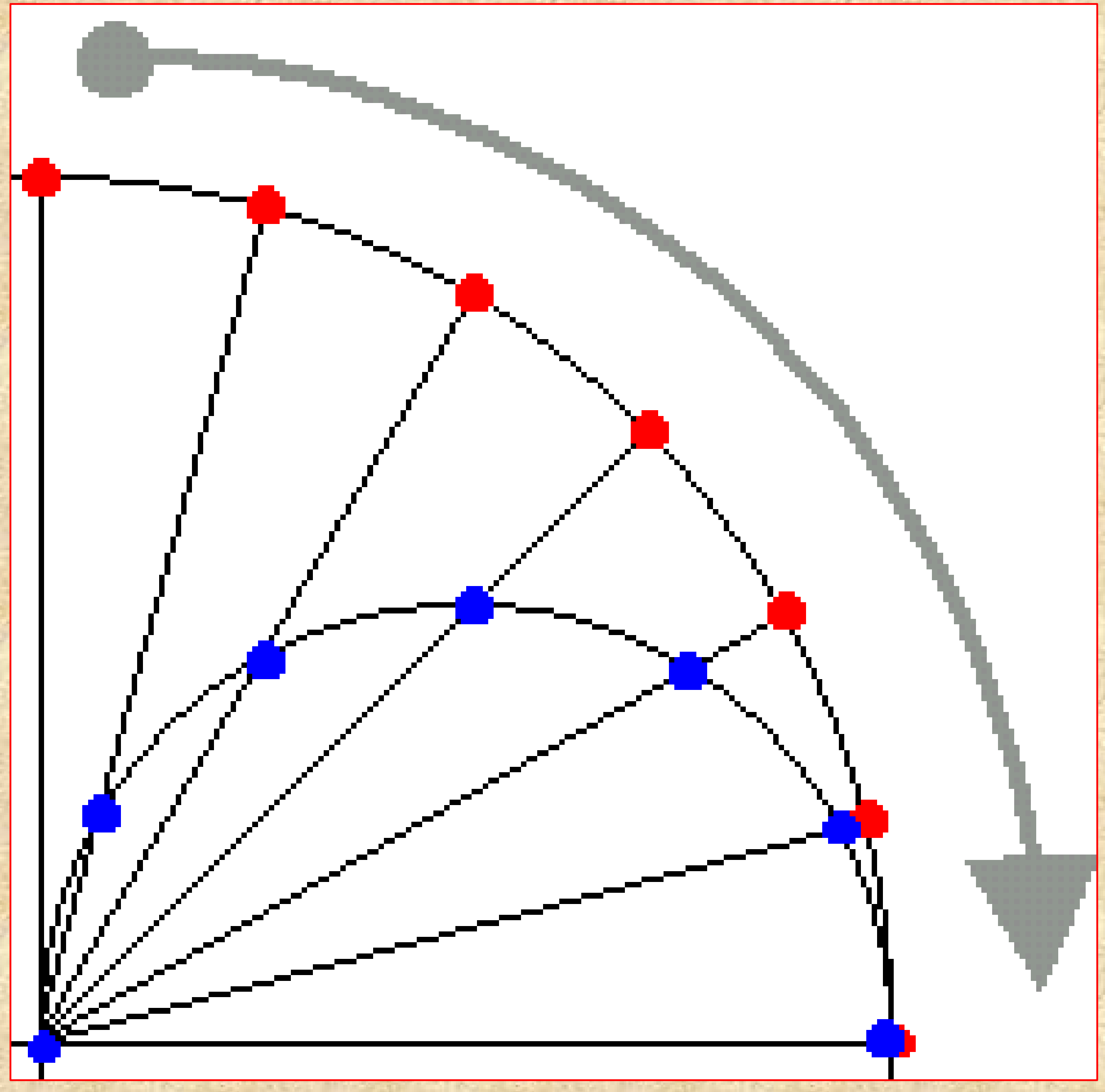
MILANO
PRESSO L' EDITORE LORENZO SONZOGNO
Libraio sulla Corsia de' Servi n. 602.
1832.

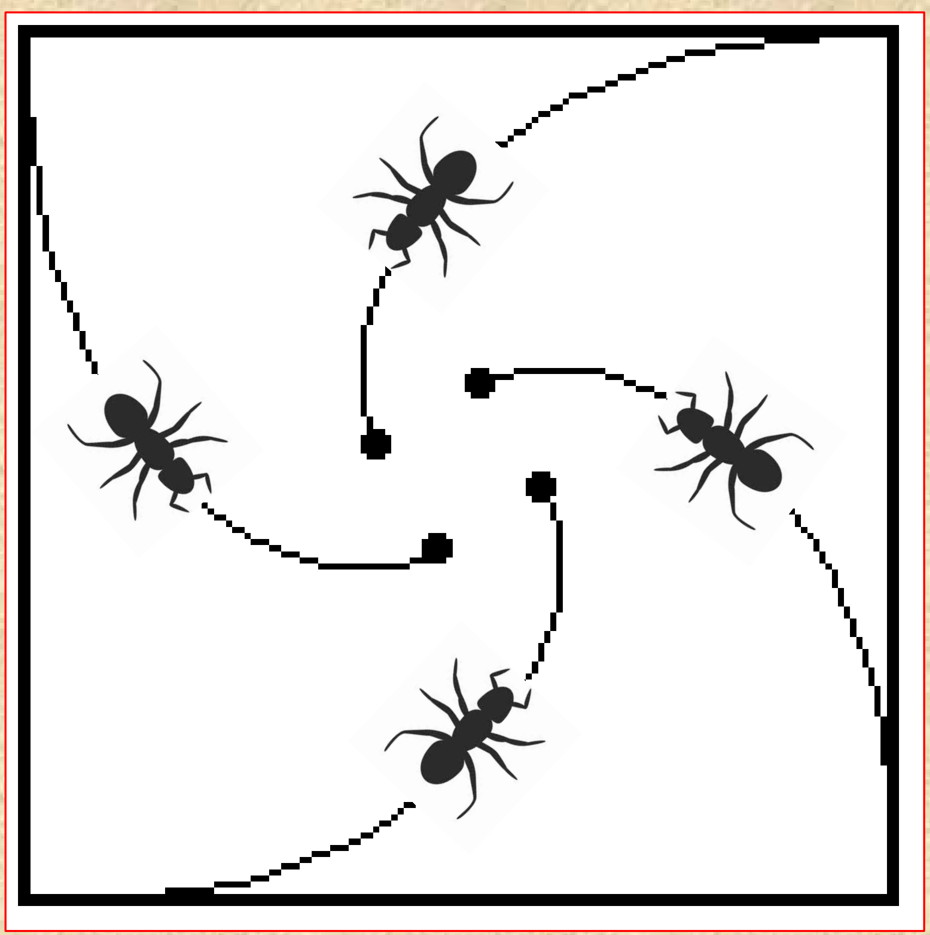
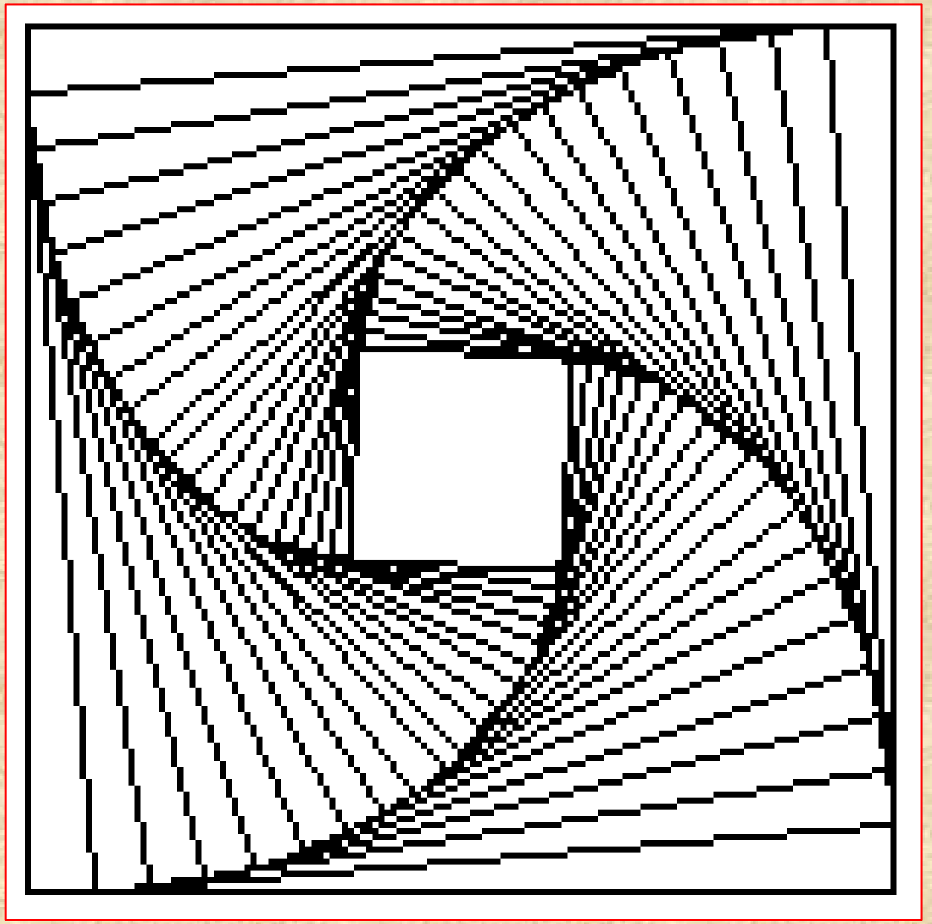
INDICE

1. Giochi di percorso

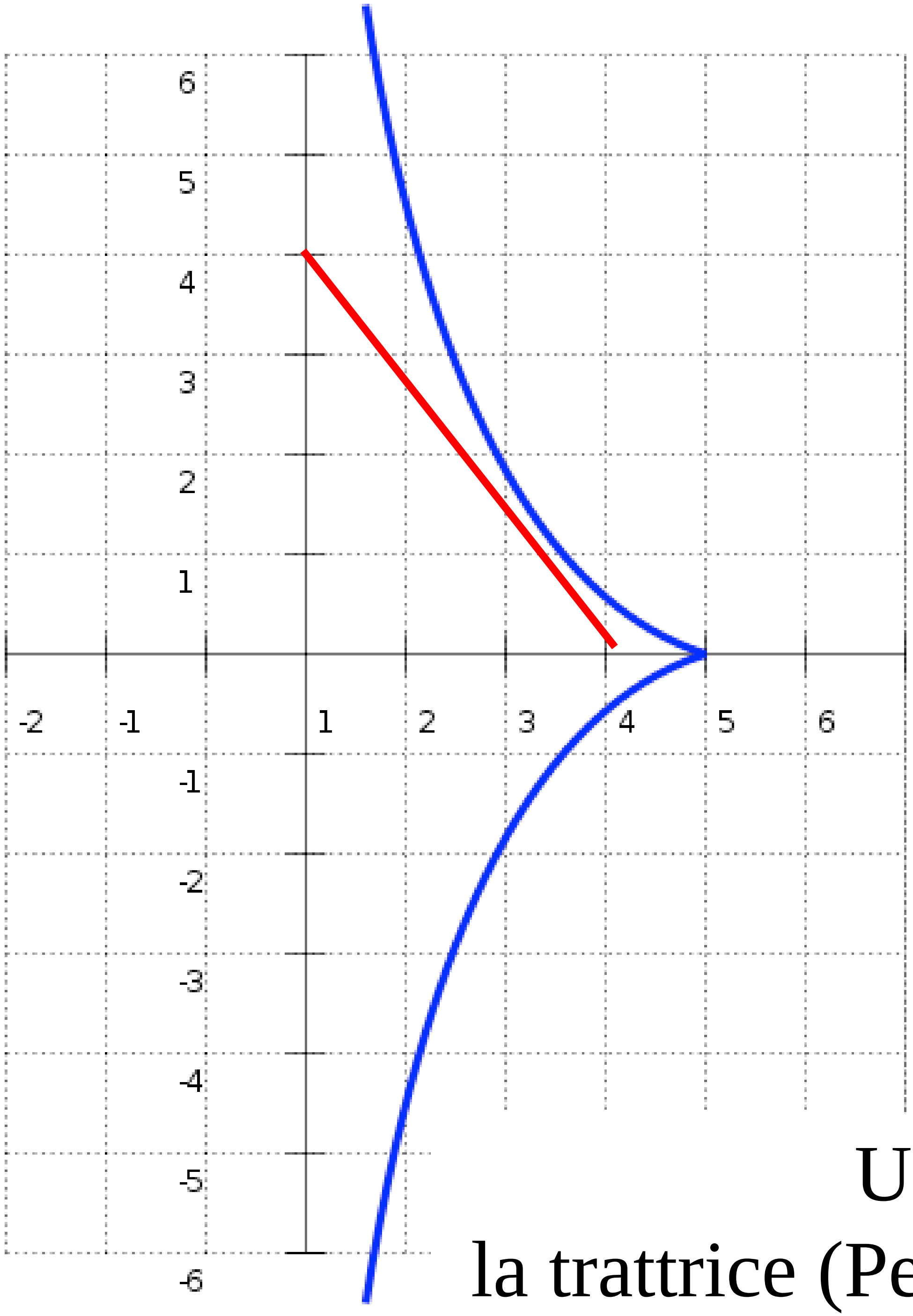

Alcuino di York
Giochi matematici
alla corte di Carlomagno
Problemi per rendere acuta
la mente dei giovani
a cura di Raffaella Franci
Edizioni ETS

Un cane e una papera si trovano in uno stagno circolare di raggio 40 m e nuotano alla stessa velocità.
La papera è al bordo e nuota seguendo la circonferenza.
Il cane parte dal centro e nuota in modo da essere sempre diretto verso la papera.
In questo modo i due animali si trovano sempre lungo uno stesso raggio.
Per quanti metri dovrà nuotare il cane prima di raggiungere la papera?



Quattro formichine partono dai quattro angoli di un quadrato di 6 metri di lato. Ogni formichina si dirige verso quella alla sua destra muovendosi verso il centro a velocità costante di 1 cm/s.



Una curva di inseguimento:
la trattrice (Perrault, Newton, Huygens)

2. Scacchiere che passione!

"[…] non vi è molta differenza fra il piacere provato da un dilettante nel risolvere un abile rompicapo ed il piacere che un matematico prova nel dominare un problema più difficile. Entrambi guardano alla bellezza pura, quell'ordine limpido, nettamente definito, misterioso, estasiante che permea tutte le strutture."

(M. Gardner, *Enigmi e Giochi Matematici*).

“Ogni paese civile conta innumerevoli giocatori di scacchi che sanno apprezzare la bellezza del gioco o di un problema. Ebbene, un problema di scacchi non è altro che un esercizio di matematica pura.

[…]

I problemi di scacchi sono gli inni popolari della matematica”

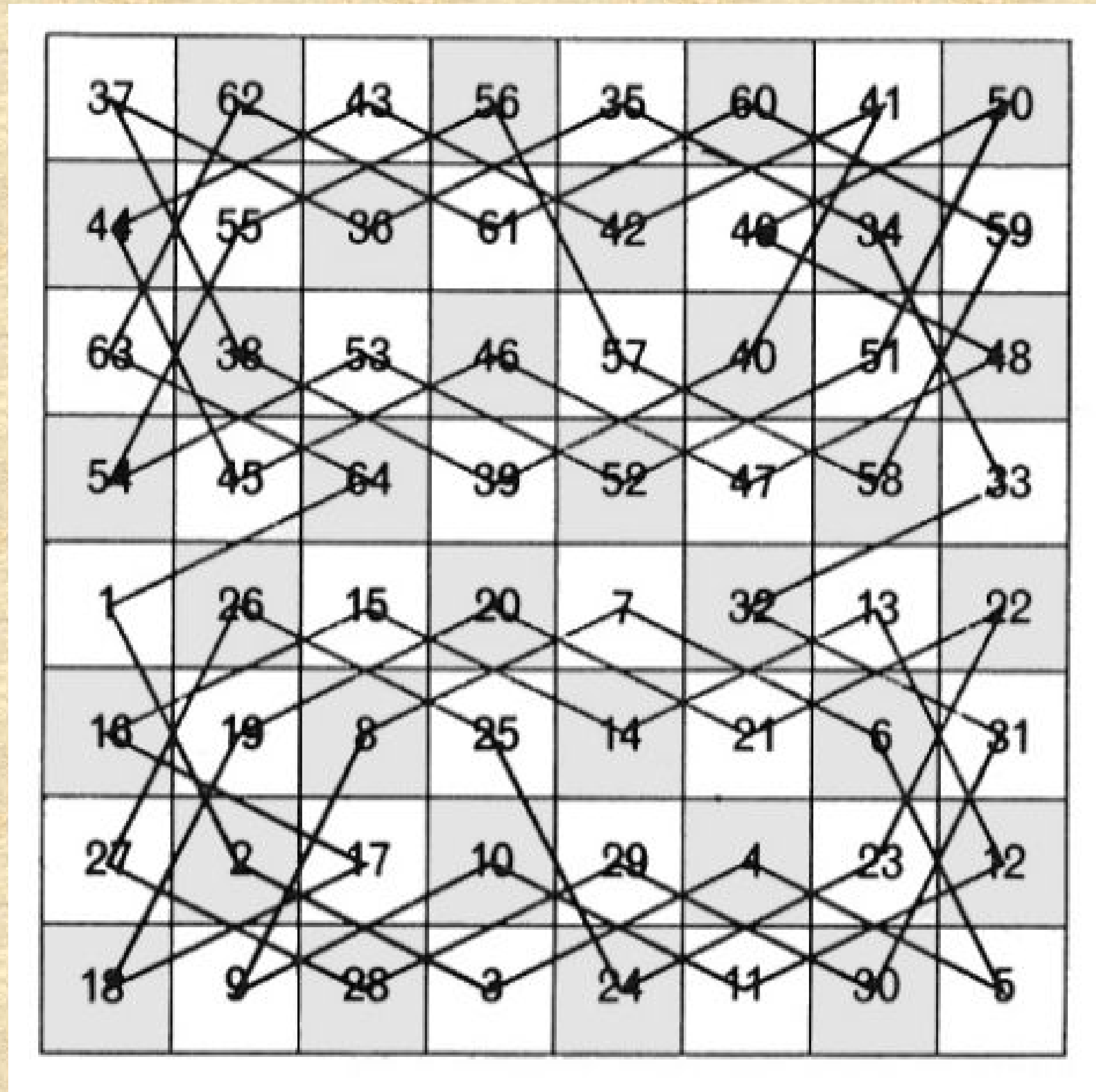
(G. Hardy, Apologia di un Matematico)

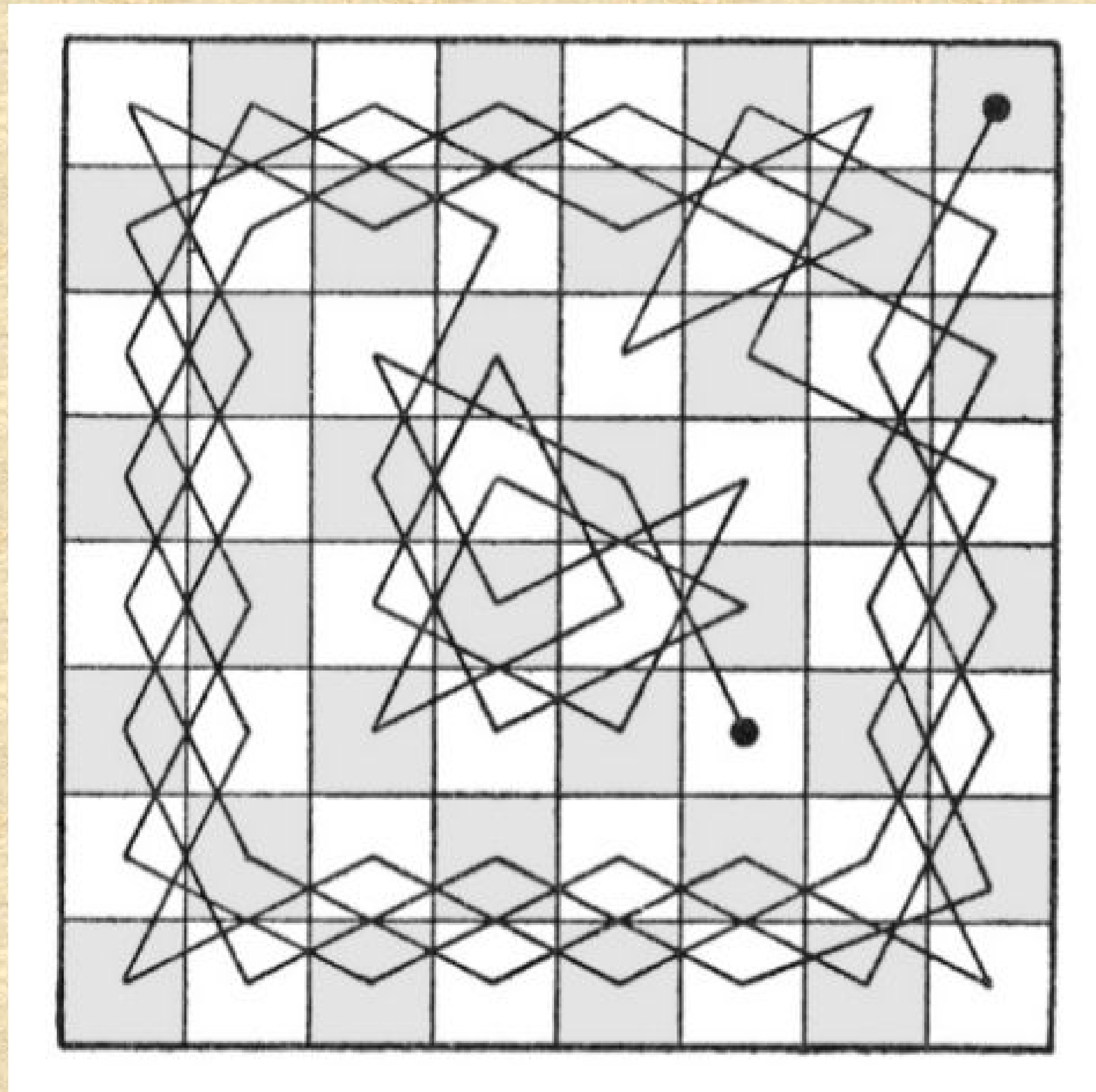
2							
		3					
10	1						
		9	4				
	5						
			8				
6							
		7					

Von Janisch, 1863

Il giro del cavallo

2	11						15
		3	12		14		
10	1				29	16	
		9	4	13			
	5	24				28	17
23			8	25	20		
6			21			18	27
	22	7		19	26		

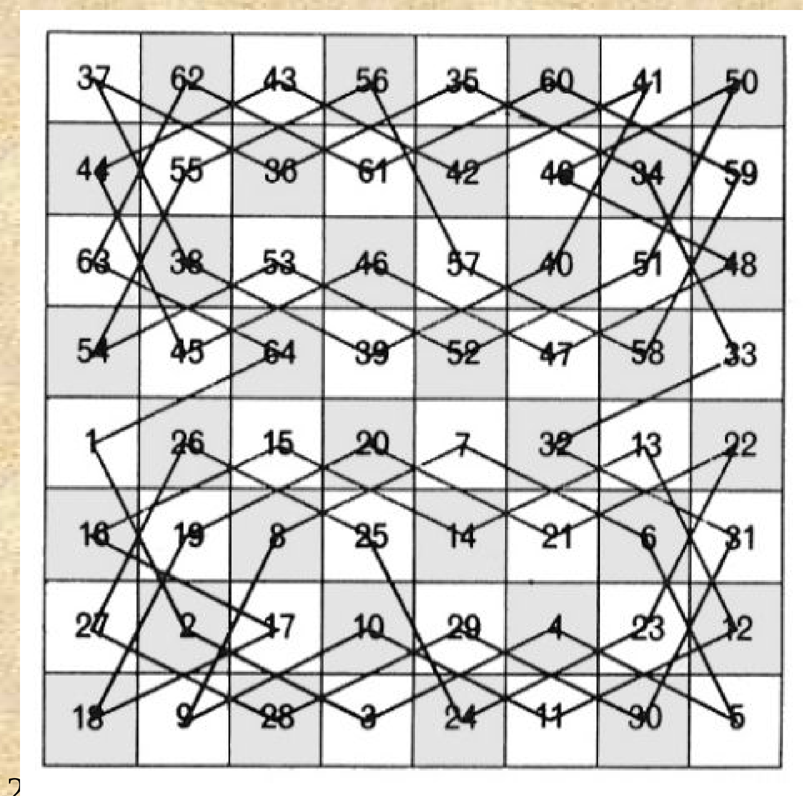

37 62 43 56 35 60 41 50
44 55 36 61 42 49 34 59
63 38 53 46 57 40 51 48
54 45 64 39 52 47 58 33
1 26 15 20 7 32 13 22
16 19 8 25 14 21 6 31
27 2 17 10 29 4 23 12
18 9 28 3 24 11 30 5

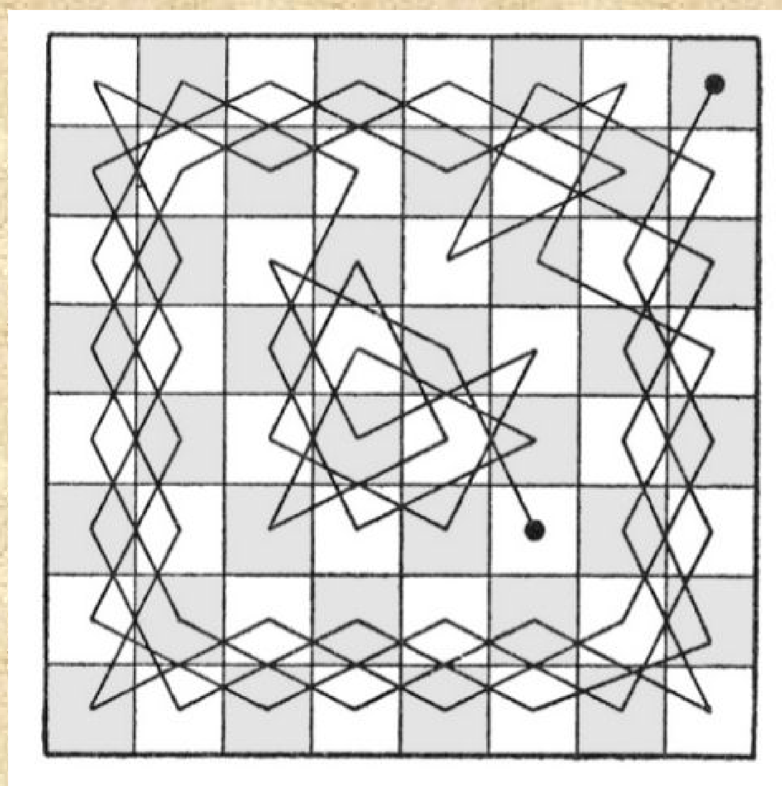



ISTRUZIONE
ATLANTE GEOGRAFICO
GIUOCO DI PAZIENZA
G. B. PARAVIA E COMP.
TORINO - ROMA - MILANO - FIRENZE - NAPOLI
EUR

3. In quanti modi?

Il numero di soluzioni possibili è di poco inferiore alle combinazioni di 168 oggetti presi a 63 a 63, che è dell’ordine di grandezza di 10^47.





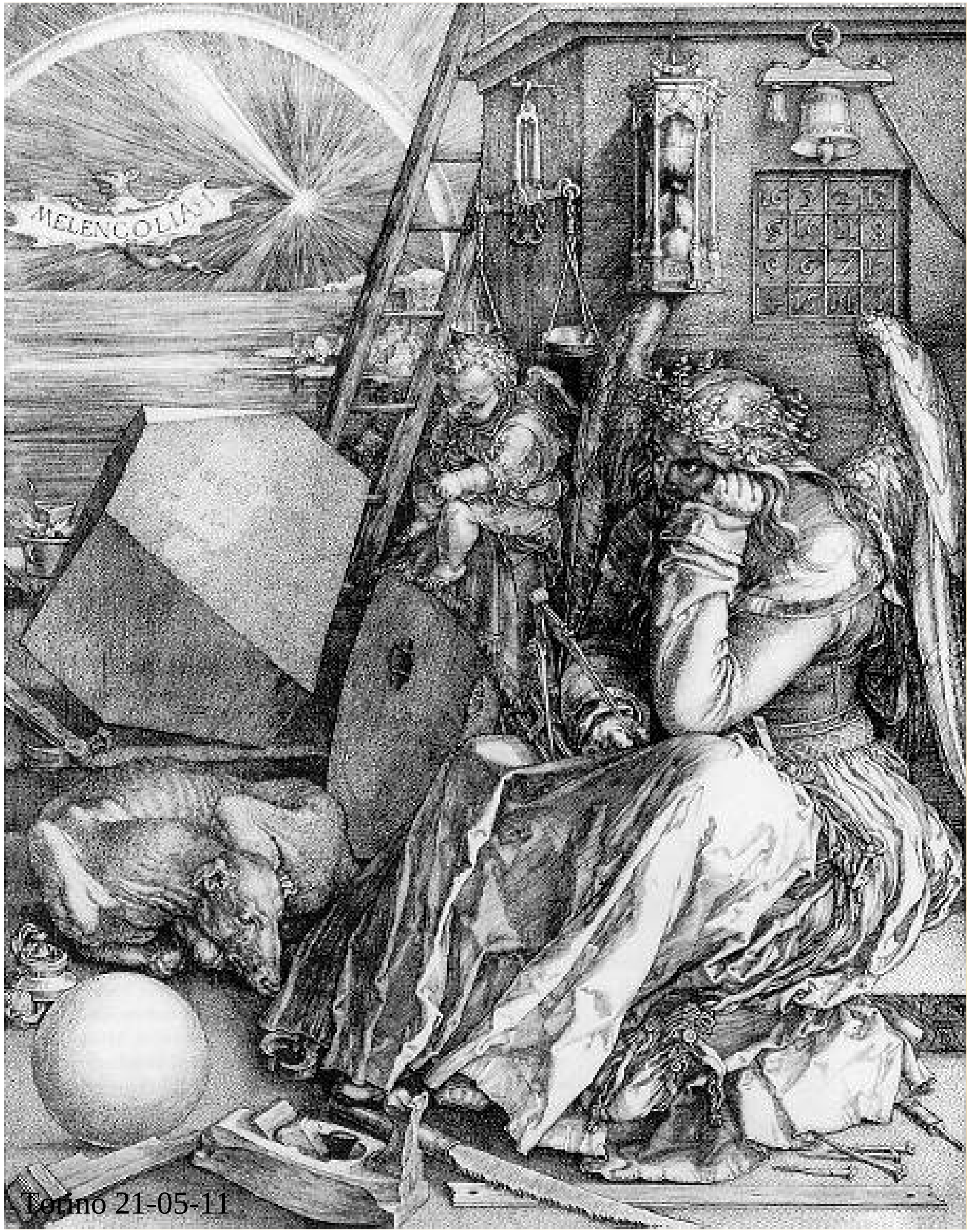
Il quadrato costruito col cavallo è quasi magico

2	11	58	51	30	39	54	15
59	50	3	12	53	14	31	38
10	1	52	57	40	29	16	55
49	60	9	4	13	56	37	32
64	5	24	45	36	41	28	17
23	48	61	8	25	20	33	42
6	63	46	21	44	35	18	27
47	22	7	62	19	26	43	34

LA SOMMA E' 260

Un quadrato è magico quando la somma dei numeri in ogni linea (orizzontale, verticale e nelle due diagonali principali) è sempre la stessa.

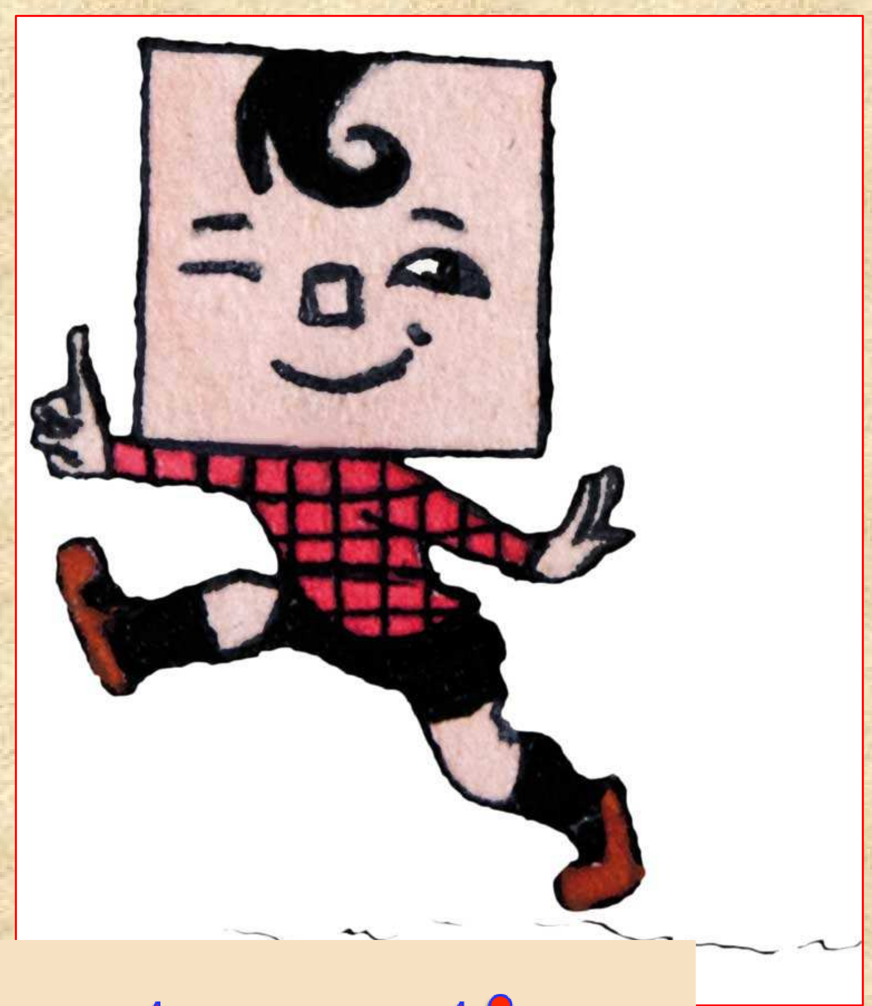
Essa corrisponde alla costante magica $n(n^2+1)/ 2$ con n l'ordine del quadrato in considerazione.



Albrecht Dürer

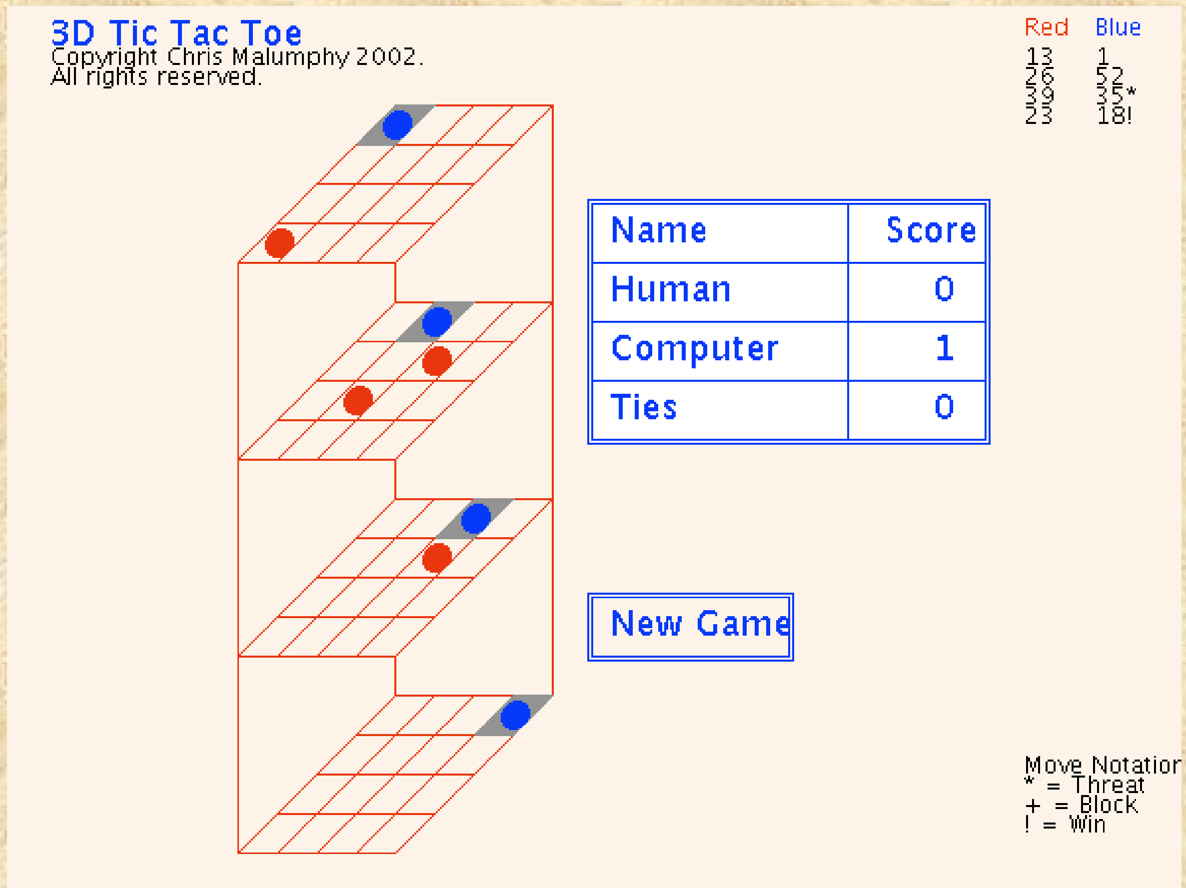
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Melancolia



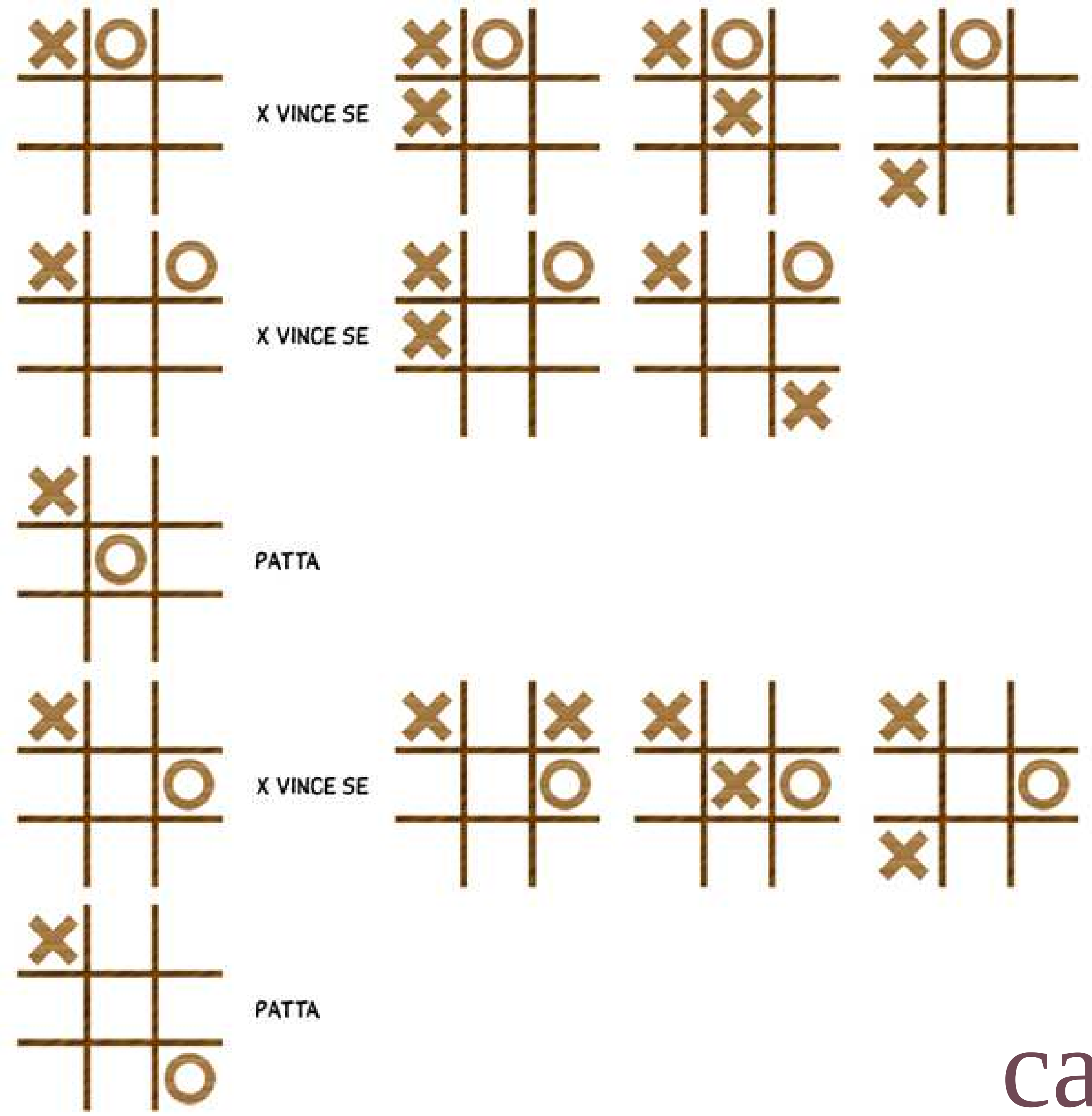
3. Verso la matematica del gioco

Tris (o filetto)



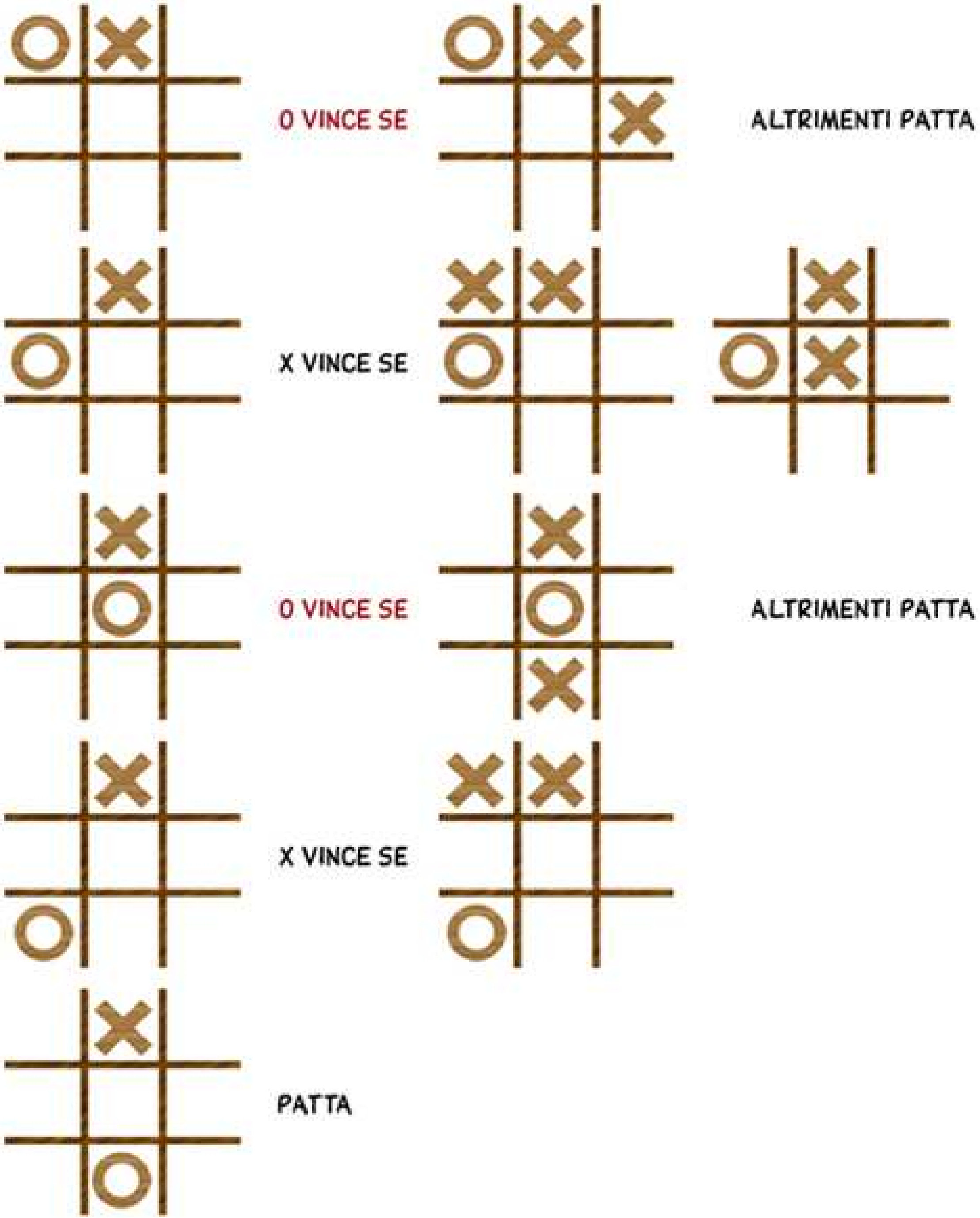
Torino 21-05-11

I tre casi possibili



caso 1

Caso 2


O VINCE SE
ALTRIMENTI PATTA
X VINCE SE
O VINCE SE
ALTRIMENTI PATTA
X VINCE SE
PATTA

Caso 3

Se i 2 giocatori procedono razionalmente non c’è una strategia vincente.

Colori e Numeri

Regole del gioco

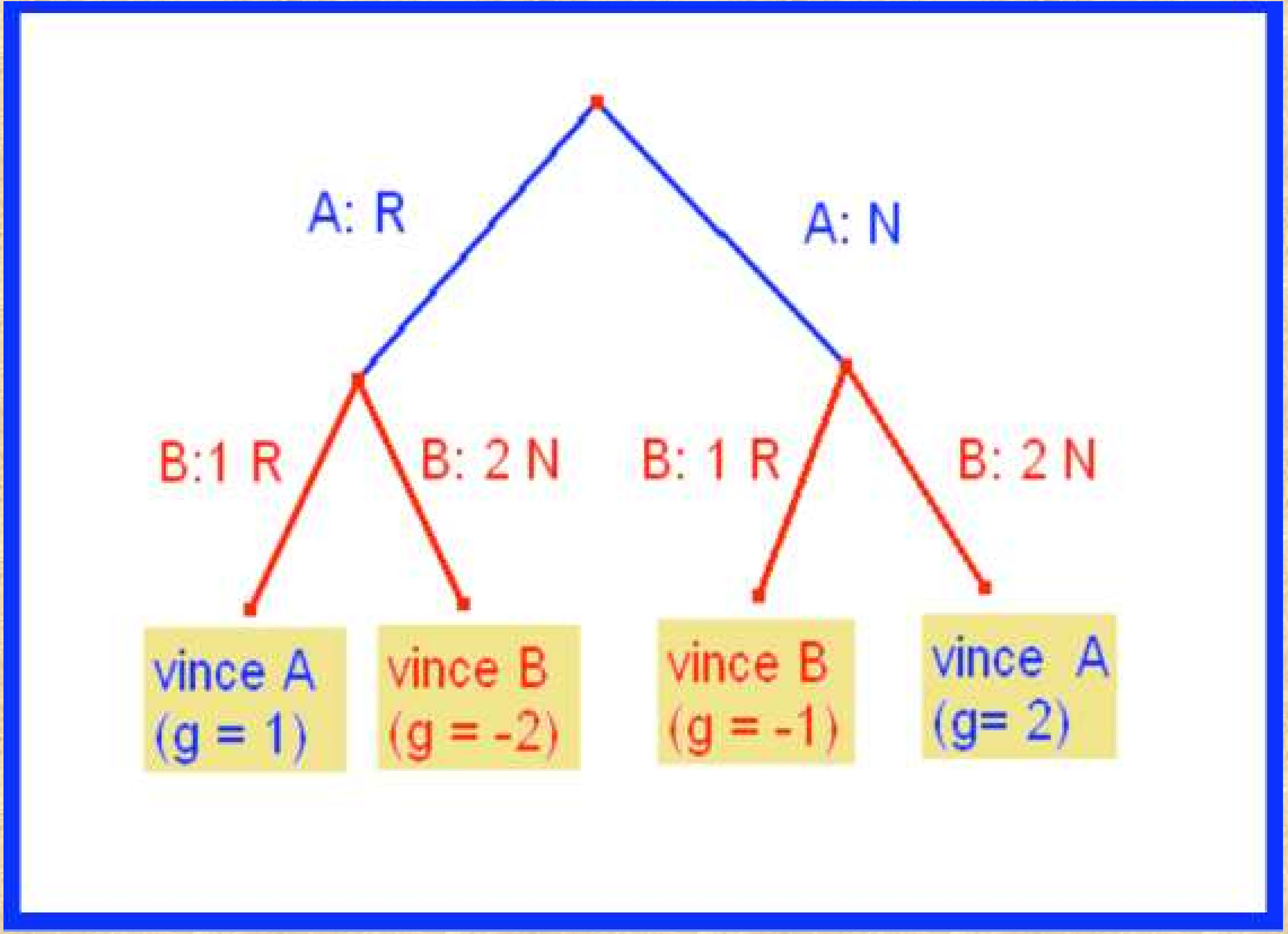
• Si gioca in due giocatori, **A** e **B**.

• A ha due carte, una **Rossa** e una **Nera**. Sceglie quale giocare.

• B ha due carte, un **asso Rosso** e un **due Nero**. Sceglie quale giocare.

• A vince se la sua scelta concorda con il colore della carta scelta da B, altrimenti perde.

• Il numero della carta scelta da B indica il valore della vincita.

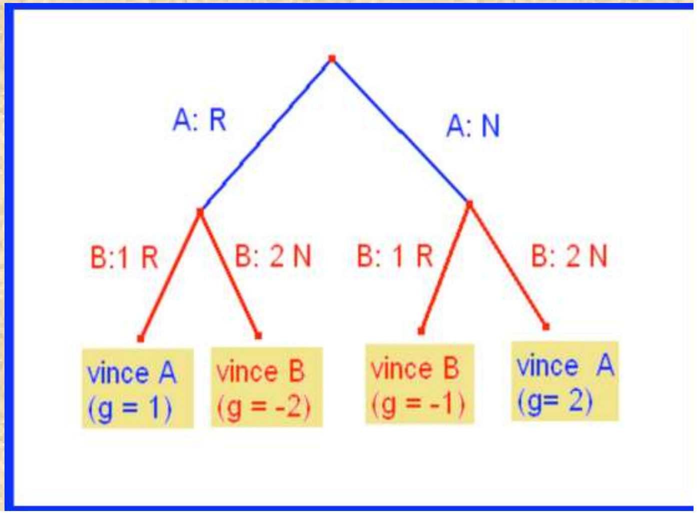

A: R
A: N
B:1 R
B: 2 N
B: 1 R
B: 2 N
vince A
(g = 1)
vince B
(g = -2)
vince B
(g = -1)
vince A
(g= 2)

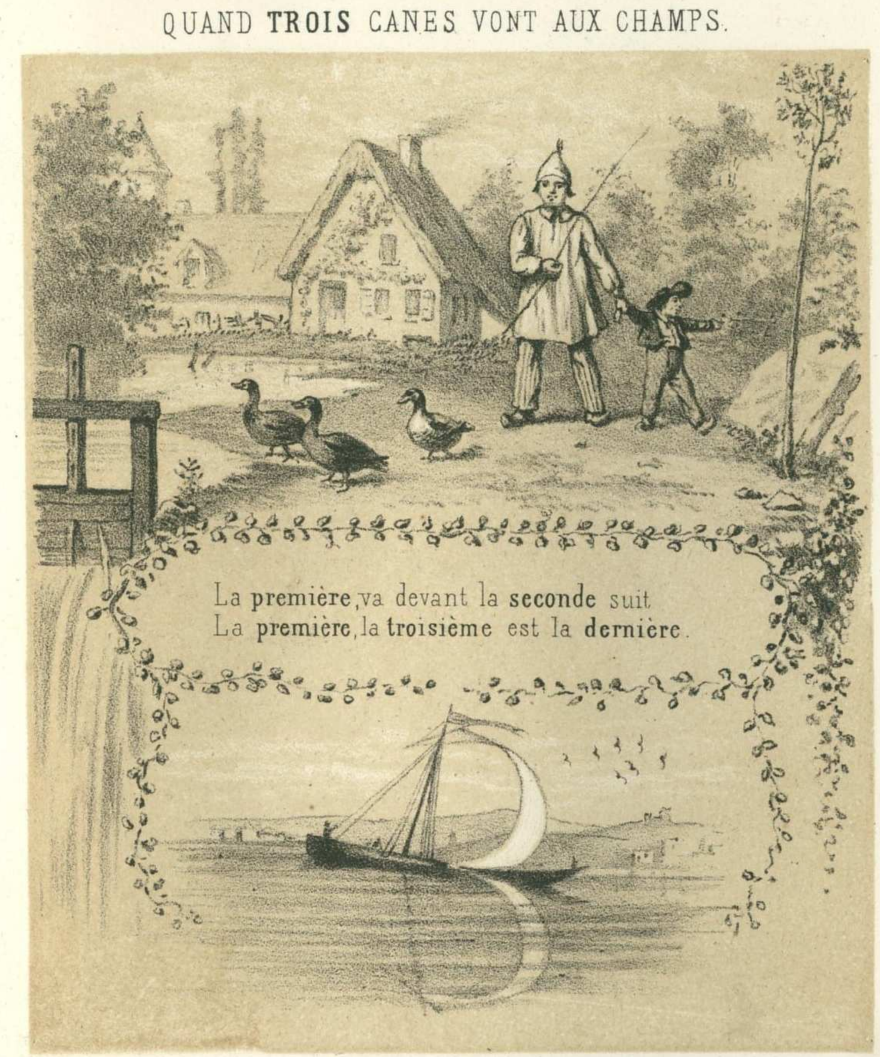
La tabella del gioco

		B		
		1R	**2N**	min
A	R	**1**	**-2**	-2
	N	**-1**	**2**	-1
	max	1	2	

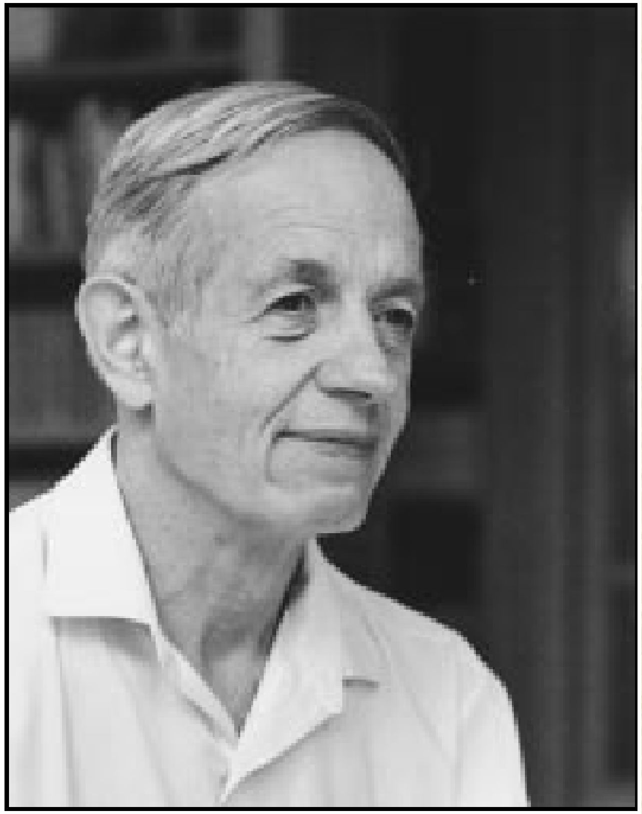
Giocando più partite ripetutamente, si trova che al giocatore **A** conviene scegliere una volta su due la prima mossa (R), mentre al giocatore **B** conviene scegliere due volte su tre la prima mossa (1 R).

In tal modo la vincita media dopo molte partite ripetute sarà 0. Mediamente nessuno dei giocatori perde.





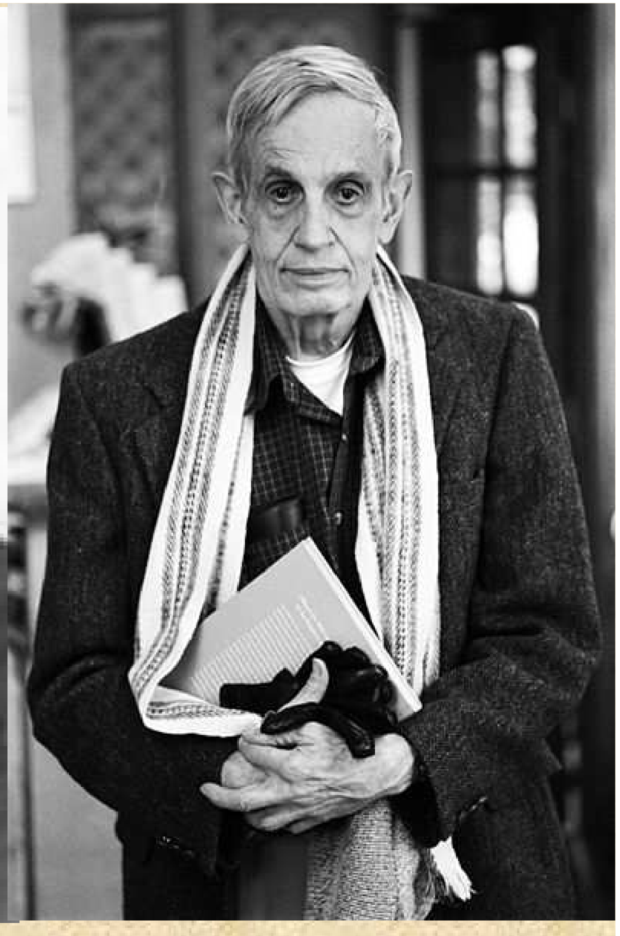
4. La teoria dei giochi



John Forbes Nash Jr., 1994.

J. F. Nash

a beautiful mind

V. Pareto (1844-1923) | J. Von Neumann (1903-1957) | J. Nash (n. 1928)

Il matematico John F. Nash ha vinto nel 1994 il premio Nobel per l’Economia in condivisione con J.C. Harsanyi e R. Selten “for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games”.

Pochi anni dopo, Nash ha avuto il singolare onore di diventare il primo matematico e premio Nobel ad ispirare, ancora vivente, una biografia e successivamente un film, recensito anche su riviste di matematica.

Sylvia Nasar, **A beautiful mind: A biography of John Forbes Nash Jr.*****, Simon & Schuster, 1998, $25.00, (trad. italiana presso Bompiani)***

Il successo del film, premiato nel 2002 con quattro Academy Awards (meglio noti come premi Oscar), ha reso familiari il nome di Nash ed il suo legame con la teoria dei giochi anche tra il grande pubblico.

In teoria dei giochi il nome di Nash è associato ad almeno tre nozioni distinte da egli stesso introdotte:

l'equilibrio di Nash;
la soluzione di Nash;
il problema di Nash.

La violenta fiammata di interesse accesa dal film nei mass-media si è concentrata soprattutto sul primo contributo, ignorando sia gli altri due concetti intitolati a Nash sia i suoi (più) importanti contributi all’analisi e alla geometria.

“I believe in assigning value to things.”

Molte persone hanno cercato nel film *A Beautiful Mind* qualche riferimento al lavoro di Nash in teoria dei giochi.

Durante il suo corteggiamento ad Alicia, Nash pronuncia la battuta:

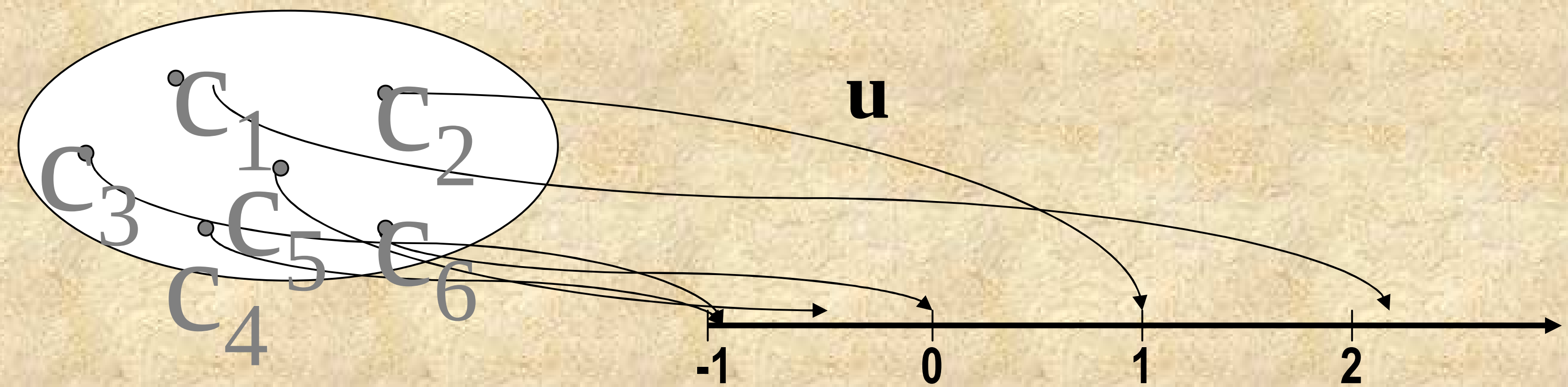
“No. I don’t believe in luck. But I do believe in assigning value to things”

Cioè: “No, non credo alla fortuna. Credo all’importanza di dare un valore alle cose”.

La teoria dei giochi, infatti, presume che una persona razionale possa attribuire una valutazione numerica ad ogni cosa e se ne serva per decidere il miglior corso d’azione.

Formalmente, indichiamo con *C* l'insieme delle possibili conseguenze associate alle azioni che una persona può intraprendere.

Supponiamo che il nostro agente abbia una funzione di utilità *u* che associa ad ogni conseguenza *c* in *C* un numero reale *u*(c) che descrive l'utilità che questi trae dalla conseguenza *c*.



Lo scopo dell’azione razionale è scegliere un’azione che conduce ad una conseguenza che massimizza l’utilità.

Dunque, gli agenti razionali agiscono in modo da massimizzare la loro funzione di utilità.

L’esistenza di una funzione di utilità nel caso di conseguenze certe è stata dimostrata dal matematico G. Debreu, premio Nobel per l’Economia nel 1983.

Tuttavia, in molti casi l’esito delle nostre azioni è soggetto a qualche forma di incertezza che si risolve soltanto dopo che abbiamo già scelto come agire.

Ad esempio, l’utilità di una puntata sul rosso alla *roulette* di un casinò dipende da quale numero esce dopo la puntata.

In questo caso, che utilità dovremmo attribuire ad un’eventuale puntata fatta prima di conoscere il colore del numero?

Per affrontare questa difficoltà, basta trovare un modo di definire l'utilità della *lotteria* che associa al rosso una vincita pari alla puntata e ad ogni altro evento una corrispondente perdita.

J. von Neumann ha dimostrato che possiamo definire questa funzione come il valore atteso della funzione di utilità *u* o, in breve, come l'*utilità attesa* della lotteria.

Se *p* è la probabilità che esca il rosso, questo vuol dire che l'utilità attesa di puntare 10 euro sul rosso può essere calcolata come

$$U = p \cdot u(10) + (1 - p) \cdot u(-10)$$

Persino alla fortuna si può dare un valore!

Se, come è naturale, identifichiamo una lotteria degenere d_c con la corrispondente conseguenza c, risulta $U(d_c) = u(c)$.

Quindi, unficando il caso di conseguenze certe e il caso di lotterie, diremo che gli agenti razionali agiscono in modo da massimizzare la loro utilità attesa.

L’ottimo di Pareto

La scena del film *A Beautiful Mind* maggiormente citata in relazione alla teoria dei giochi mostra Nash intento a suggerire a quattro amici come organizzare il corteggiamento di cinque ragazze, una delle quali è bionda e molto più attraente delle altre quattro, che sono more.

COUNTING DOWN

Proviamo a descrivere la situazione come un *gioco*, ovvero come un problema di interazione strategica.

In generale, un gioco è caratterizzato da un insieme di giocatori $i = 1, 2, \ldots n$ ciascuno dei quali sceglie simultaneamente quale strategia adottare nell'insieme S_i.

Il vettore $s = (s_1, s_2 \ldots)$ delle strategie adottate dai giocatori determina una conseguenza c alla quale ogni giocatore $i = 1, 2$,. associa un'utilità $u_1(c)$, $u_2(c)$,…

Nella scena del film, i giocatori sono cinque: Nash e i suoi quattro amici. Ognuno di essi ha la stessa funzione di utilità, che attribuisce valore *3* a sedurre la bionda, *2* a sedurre una qualsiasi delle more e 0 a essere respinto.

M / N	b	m
b	(0,0)	(3,2)
m	(2,3)	(2,2)

Ognuno di essi può adottare come strategia di corteggiare una qualsiasi delle cinque ragazze, ma il successo è garantito soltanto se il corteggiamento non è insidiato da un rivale.

A chi dovrebbero rivolgere la loro attenzione i giocatori?

L’ovvia risposta è che sarebbe opportuno che ciascuno dei cinque corteggiasse una ragazza diversa.

Come spiega lucidamente Nash, in questo modo nessuno intralcia gli altri e i cinque amici possono congiuntamente conseguire la massima utilità possibile.

Questa proposta di soluzione del problema del corteggiamento è nota in economia come *ottimo paretiano*.

Un vettore (o combinazione) di strategie *s* è un ottimo paretiano se non esiste nessun'altra combinazione *s'* tale che $u_1(s') \geq u_1(s)$ e $u_2(s') \geq u_2(s)$ e valga almeno una disuguaglianza stretta (>).

Adottare congiuntamente una strategia che non è un ottimo paretiano significa ridurre l'utilità di qualcuno senza aumentare l'utilità di nessuno.

Giocare congiuntamente un ottimo paretiano significa evitare di sprecare utilità e dunque risulta molto naturale suggerire che l'azione sociale si orienti verso un ottimo paretiano.

Tuttavia, anche se l’ottimo paretiano è collettivamente razionale, non è detto che lo sia individualmente.

L’esempio più noto è il Dilemma dei Prigionieri.

Il Dilemma dei Prigionieri.

La polizia ha fermato due pregiudicati che devono scontare un anno di prigione ciascuno per un crimine minore.

Il procuratore sospetta (ma non può provare) che i due malfattori siano complici in un crimine maggiore, punibile con sei anni di prigione. Nel tentativo di renderli punibili per il crimine maggiore, il giudice avanza separatamente a ciascuno di loro una proposta.

Il Dilemma dei Prigionieri.

“Se accusi il tuo socio del crimine maggiore, ti abbuono l’anno di prigione per il crimine minore. E, se il tuo socio non ti coinvolge nel crimine maggiore (nel qual caso dovrai farti cinque anni di prigione), ti libero subito.”

La situazione può essere descritta come un gioco tra i due pregiudicati, che hanno come possibili strategie l'opzione di accusare o no il socio e come funzione di utilità l'opposto del numero di anni di prigione che rischiano di farsi.

In questo caso, tutte le combinazioni di strategie sono ottimi paretiani, salvo quella in cui i due si accusano a vicenda. Infatti, mentre in caso di omertà ognuno dovrebbe scontare soltanto un anno di prigione, accusarsi a vicenda li terrebbe entrambi per cinque anni in prigione e questo esito è uniformemente peggiore.

Dal punto di vista individuale, tuttavia, l’omertà non è una soluzione credibile. Ecco la linea di condotta suggerita dall’avvocato al primo malfattore:

“Hai due opzioni: accusare il tuo socio oppure no. Se lo accusi, ti fai un anno di prigione in meno. Quindi, se lui non ti accusa, esci subito (invece di farti un anno); se lui invece ti accusa, sconti cinque anni (invece di sei). Comunque vada, ti conviene accusarlo”

Naturalmente, l’avvocato del secondo malfattore suggerisce una linea di condotta analoga ed entrambi i prigionieri scelgono di accusarsi a vicenda, condannandosi a cinque anni di prigione ciascuno.
In questo caso, le ragioni individuali prevalgono sulla razionalità collettiva.

L’equilibrio di Nash

L’idea che la razionalità individuale preceda quella collettiva sottende e giustifica il concetto di equilibrio di Nash.

Dato un gioco, il giocatore *i* ha il diritto irrinunciabile di scegliere la strategia che preferisce nell’insieme S_i.

Supponiamo che qualcuno proponga ai giocatori la soluzione s^* e poi li lasci liberi di decidere autonomamente e in isolamento se seguire o no il consiglio.

Certamente non ci aspetteremmo che la raccomandazione sia seguita se uno dei giocatori, immaginando che tutti gli altri si conformino al consiglio, può ottenere un'utilità maggiore giocando una strategia s_i diversa da quella proposta.

Un agente razionale, infatti, agisce in modo da massimizzare la *sua* funzione di utilità.

Pertanto, condizione *necessaria* affinché la soluzione proposta sia rispettata da tutti è che essa massimizzi l'utilità di ciascun giocatore quando tutti gli altri si attengono alla soluzione proposta.

Nash ha dimostrato che ogni gioco con un numero finito di giocatori e di strategie (*gioco finito*) ammette almeno un equilibrio.

Occorre estendere la definizione al caso in cui i giocatori possono scegliere le proprie strategie anche probabilisticamente.

Nel problema di corteggiamento descritto sopra, invece, qualsiasi combinazione di strategie in cui ogni ragazzo corteggia una ragazza diversa è sia un ottimo di Pareto sia un equilibrio di Nash.

Il problema ammette più “soluzioni” possibili, a cui corrispondono utilità diverse: chi prende la bionda consegue un’utilità maggiore degli altri.

Nella finzione cinematografica, Nash spiega agli amici che se ciascuno di loro va con una mora diversa questo realizza un ottimo paretiano.
La sua spiegazione si trasforma naturalmente in un'implicita raccomandazione perché soddisfa la condizione necessaria di razionalità individuale.

Ciò che Nash non dice è che questo lascerebbe a lui la bionda, realizzando fra tutti i possibili equilibri quello che gli consente di puntare alla bionda indisturbato.

Come un agente razionale, Nash agisce in modo da sfruttare le sue (superiori) conoscenze per massimizzare la sua utilità, magari a spese di quella degli amici.

L’esempio del corteggiamento evidenzia un problema caratteristico nei casi in cui un gioco ammette più equilibri di Nash.

Come possiamo selezionare l’equilibrio “giusto”?

L’approccio che ha suscitato maggiore interesse, generando centinaia di lavori nei vent’anni precedenti all’assegnazione del Nobel a Nash, è stato direttamente ispirato dal suo lavoro.

I teorici dei giochi della generazione successiva, infatti, hanno studiato come rafforzare il criterio associato all’equilibrio di Nash generando condizioni necessarie più stringenti di quelle di Nash.

Il più diffuso tra questi concetti è noto con il nome di perfezione nei sottogiochi e si deve a Selten, uno dei due covincitori del Nobel di Nash.

Il concetto si applica ai giochi che si sviluppano in più fasi, dove i giocatori devono considerare strategie che tengano conto anche di quanto è successo prima che tocchi a loro giocare.

Ecco un esempio.

Supponiamo che il gioco del corteggiamento descritto sopra si svolga in modo dinamico: i ragazzi lasciano il tavolo ad uno a uno secondo un ordine prestabilito e avvicinano la ragazza che desiderano.

Per semplicità, facciamo finta che ci siano soltanto due ragazze (una bionda ed una mora) e soltanto due pretendenti (John Nash ed il suo amico Martin) e che la prima mossa spetti a Martin.

Intuitivamente, la soluzione che prevediamo è che il primo ragazzo scelga la bionda e lasci a Nash la mora.

Questo è un equilibrio di Nash.

Consideriamo adesso la seguente situazione. Prima che Martin si alzi, Nash gli bisbiglia: “se adesso vai per la bionda, sappi che verrò a romperti le uova nel paniere”.

Se Martin crede a questa minaccia, gli conviene andare per la mora e conseguire un’utilità di 2 invece dello 0 che otterrebbe sgomitando con Nash per guadagnarsi le attenzioni della bionda.

Quanto a Nash, se Martin gli crede e gli lascia campo libero, può andare per la bionda e conseguire un'utilità di *3* invece che 2.

Poiché nessuno dei due può ottenere un'utilità maggiore modificando soltanto la sua strategia, anche questo è un equilibrio di Nash.

Tuttavia, poichè l’equilibrio si tiene soltanto se Martin crede alla minaccia di Nash, Martin dovrebbe chiedersi se questa minaccia è davvero credibile o se Nash sta bluffando.

Se Martin si alza e va dalla bionda, Nash ha di fronte due scelte: può fare buon viso a cattivo gioco e prendersi la mora conseguendo un’utilità di 2, oppure portare a termine la sua minaccia ma conseguire un’utilità di 0.

Dal momento che Nash è razionale, non troverà nel suo interesse portare a termine la minaccia e dovrà accontentarsi della mora.

Quindi, se Martin sfrutta la “prevedibilità” del comportamento razionale di Nash, può distruggere il secondo equilibrio e ripristinare la soluzione intuitiva.

Il criterio di perfezione nei sottogiochi di Selten accerta in modo sistematico la credibilità delle minacce e delle promesse dei giocatori e scarta gli equilibri di Nash che non passano questo test di credibilità.

Con qualche formalismo aggiuntivo, l'esistenza degli equilibri perfetti nei sottogiochi per un gioco finito è un corollario del teorema di Nash.

La soluzione di Nash

Torniamo al nostro gioco di corteggiamento semplificato, in cui Nash e Martin devono decidere come avvicinarsi alle due ragazze.

I due stanno discutendo che cosa fare: non sorprendentemente, Nash caldeggia l’equilibrio in cui prende lui la bionda, mentre Martin insiste per giocare l’equilibrio in cui Nash prende la mora.

La discussione va avanti da un pezzo, quando il barista si fa avanti e dice loro: “Ragazzi, un po’ di decenza: sembrate due mercanti che stiano trattando un tappeto! E’ mai possibile che non possiate trovare un modo per cooperare?”

Stimolato dal rimprovero, Nash lascia la bionda a Martin e si siede a riflettere su quanto è appena successo.

Ci sono due parti in conflitto che desiderano trovare un *accordo di cooperazione* per dirimere al meglio le loro divergenze.

Si può fornire loro un suggerimento adeguato per risolvere il conflitto in modo ragionevole?

Ad esempio, se il governo ed i sindacati sono impegnati in un braccio di ferro sulla legislazione in materia di lavoro, possiamo aiutarli a cogliere gli aspetti salienti del conflitto e fornire loro un criterio generale per comporlo?

In termini più generali, come possiamo descrivere un problema di contrattazione e che tipo di soluzione possiamo suggerire?

Il nostro problema consiste nel trovare un criterio generale per risolvere i problemi di contrattazione. Dal punto di vista matematico, ci basta associare ad ogni problema di contrattazione una soluzione ammissibile.

Esistono condizioni necessarie e sufficienti che garantiscano una soluzione ragionevole del problema di contrattazione?

L’assioma di razionalità individuale impone che un accordo di cooperazione garantisca a ciascuno degli agenti un’utilità non inferiore a quella che potrebbe ottenere rompendo le trattative e forzando il disaccordo.

L’assioma di ottimalità paretiana richiede che un accordo di cooperazione non sprechi risorse, come accadrebbe se esistesse una strategia che assicura ad almeno un agente un’utilità superiore senza ridurre l’utilità ottenuta dall’altro.

Purtroppo, queste due ovvie condizioni necessarie non bastano a caratterizzare una soluzione.

Questo suggerisce naturalmente la seconda domanda: possiamo fornire condizioni sufficienti?

Nash ha risposto affermativamente, fornendo la prima caratterizzazione di una soluzione al problema di contrattazione.

Stabilendo la possibilità di risolvere per via assiomatica i problemi di contrattazione, Nash ha stimolato un'ampia letteratura interessata a investigare sistemi alternativi di assiomi per generare regole ragionevoli di risoluzione dei conflitti.

Il suo contributo ha aperto la strada allo studio ed alla formalizzazione di principi generali a cui gli agenti interessati a risolvere un problema di cooperazione possono far riferimento per sostenere le loro proposte e difendere i loro diritti.

John Milnor Director of the Institute for Mathematical Sciences at the State University of New York:

Although equilibrium theory, as developed by Nash and his successors, seems to provide the best-known description of what is likely to happen in a competitive situation, an equilibrium is not necessarily a good outcome for anyone.

In contrast to the classical economic theory of Adam Smith, where free competition leads to best-possible results, and in contrast to classical Darwinian theory, where natural selection always leads to improvement in the species, the actual dynamics of unregulated competition can be disastrous.

We all know that political conflict between nations can lead to an arms race, which is bad for everyone concerned, and in extreme cases can lead to totally unnecessary war.

Similarly, in evolutionary theory an arms race within a species or between competing species over geological periods of time can be extremely detrimental.

Indeed, it seems perfectly conceivable that natural selection may sometimes lead to a dead end and eventual extinction.

1861 > 2011 > >

150° anniversario Unità d'Italia

5. A mo' di conclusione

I matematici creativi raramente si vergognano del loro interesse verso argomenti ricreativi: La topologia ebbe origine dall'analisi di un indovinello riguardante il passaggio di ponti fatta da Eulero.[...]. David Hilbert, il grande matematico tedesco, dimostrò uno dei teoremi fondamentali nel campo degli indovinelli sulla divisione [...]. L'interesse di queste grandi menti nel divertimento matematico non è difficile da comprendere, dato che l'attività creativa del pensiero spesa per argomenti di questo tipo è dello stesso genere di pensiero che conduce alla scoperta matematica e scientifica.

Cosa è la matematica, dopo tutto, se non la soluzione di un indovinello? E cosa è la scienza se non uno sforzo sistematico per ottenere sempre migliori risposte agli indovinelli posti dalla natura?

(M. Gardner, Enigmi e Giochi Matematici, 2000)

Games are no longer just for fun; they offer potentially powerful learning environments. Today's students have grown up with computer games. In addition, their constant exposure to the Internet and other digital media has shaped how they receive information and how they learn. There are many attributes of games that make them pedagogically sound learning environments.

An increasing number of faculty are using games as enhancements to the traditional learning environment
with encouraging results. While the interactivity and engagement of games are highly positive a number of questions remain about how games will be developed, deployed and accepted in higher education.

Oblinger, D. (2004). *The Next Generation of Educational Engagement*. Journal of Interactive Media in Education.

Grazie!

vent'anni
MATEMATICA
SENZA FRONTIERE 2011

vent'anni
MATEMATICA
SENZA FRONTIERE 2011

vent'anni
MATEMATICA
SENZA FRONTIERE 2011

vent'anni
MATEMATICA
SENZA FRONTIERE 2011