

Matematica Senza Frontiere

Mathématiques en couleurs

Distribution des prix
17 mai 2011

A l'occasion de la distribution des prix, on organise une compétition ludique afin de sélectionner les classes avec les meilleurs scores.

Je vais vous proposer non seulement une synthèse de la présentation, qui représente le leitmotiv des questions, mais aussi quelques problèmes.

Italie avant de l'unité

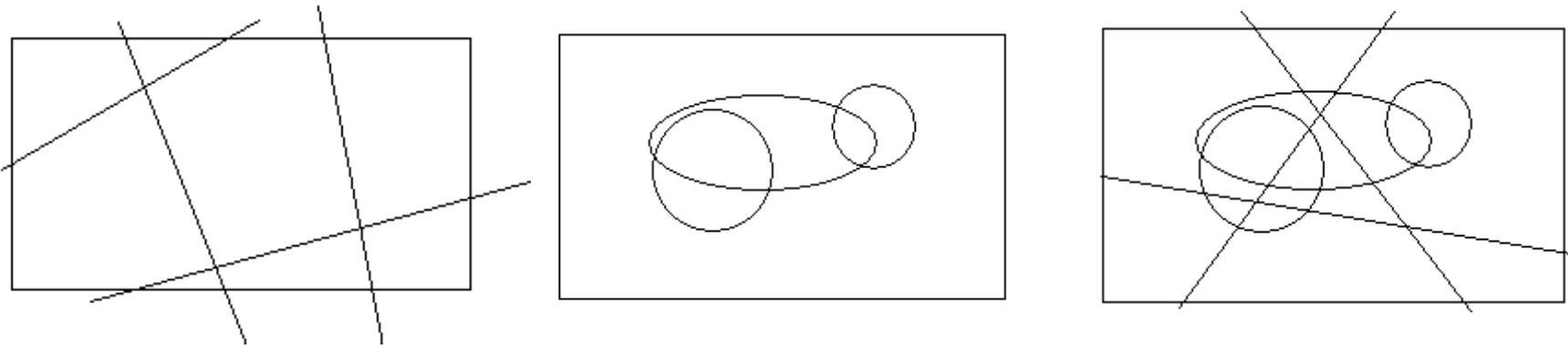


Posons-nous la question suivante: quel est le nombre **minimum** de couleurs **nécessaires** pour la colorier?

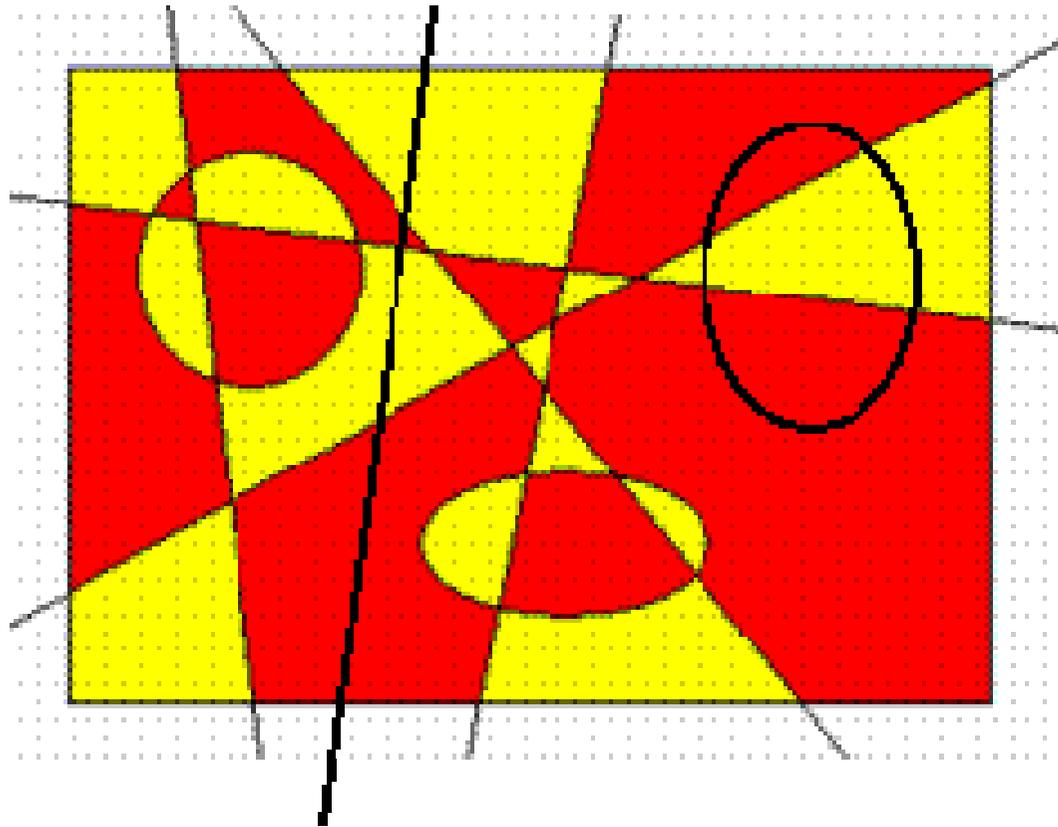
Pour pouvoir répondre à cette question, laissons-nous aider par d'autres mathématiciens qui ont considéré le problème avant nous.

Colorions une carte

Problème: quand **deux couleurs** sont suffisantes?



Dès 1952, Dynkin – Uspenskii a présenté ce théorème dans la revue *Mathematical discussions*, Moscou:

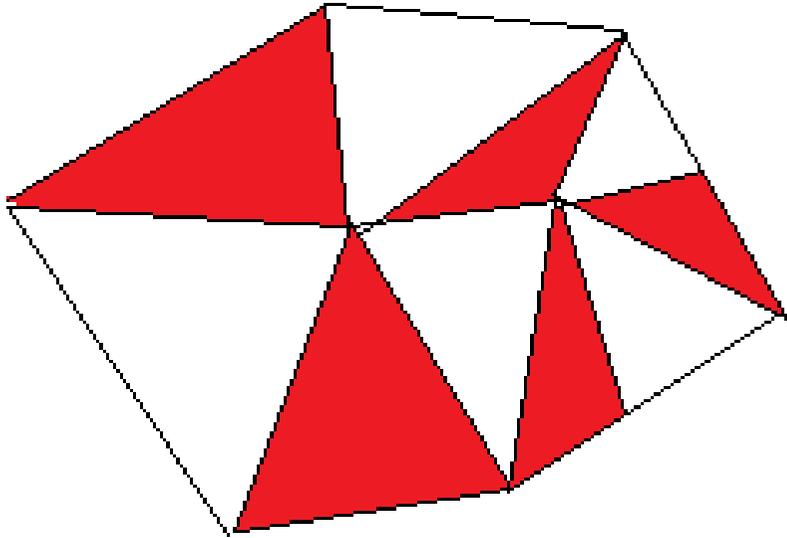


deux couleurs suffisent
pour toute carte tracée
avec des lignes droites
qui en traversent toute la
surface, ou bien avec
des lignes **fermées**
simples entièrement
internes à la carte

Théorème des deux couleurs

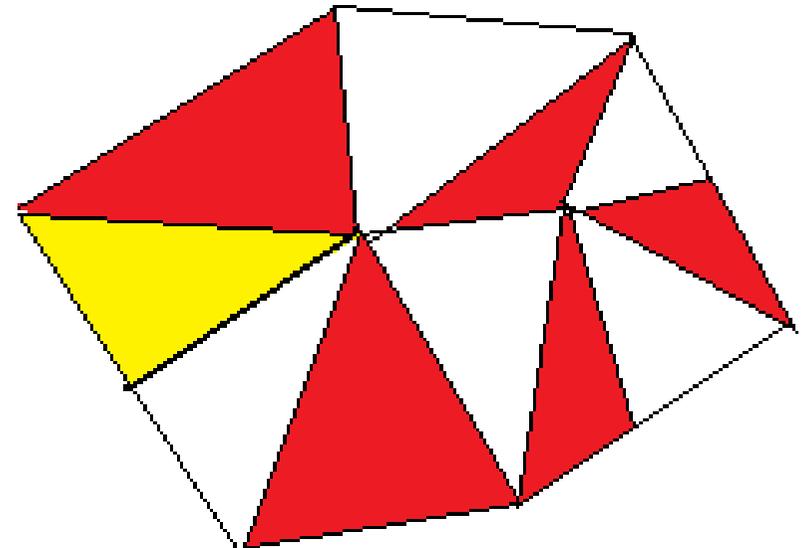
Le théorème est valable en général si l'on dessine des **lignes fermées entièrement internes**. Il vaudrait mieux ne pas les tracer, mais le théorème peut être démontré même si les lignes fermées s'entrecroisent.

Théorème des deux couleurs



Les figures, dont le nombre de lignes convergeant vers un sommet est toujours un nombre pair, peuvent être coloriées avec deux couleurs seulement.

Si les lignes qui convergent vers un sommet sont un nombre impair, il faudra dans ce cas ajouter une couleur.



Italie

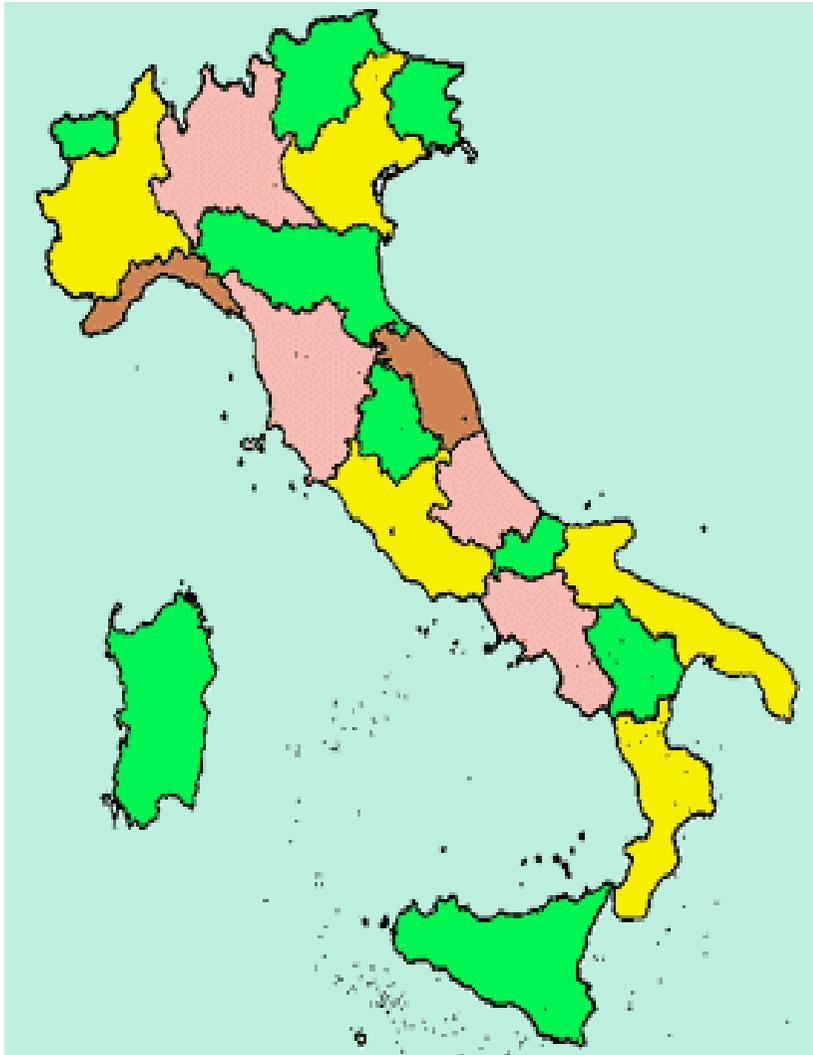


Voici la carte de géographie de l'Italie, telle qu'elle est aujourd'hui.

Combien de couleurs ont été utilisées?

Peut-on en utiliser moins et combien au minimum?

Italie



Nous avons réussi à la colorier en utilisant uniquement 4 couleurs.

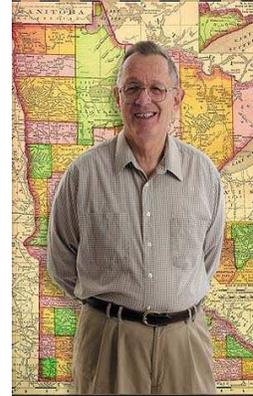
C'est une règle générale?

Après un excursus historique de



De Morgan
1852

à

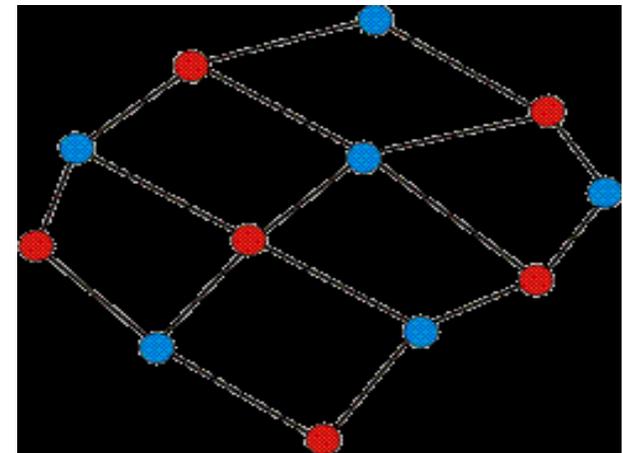
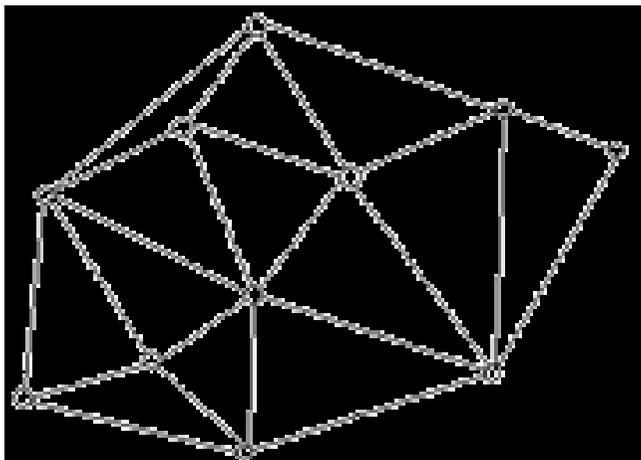
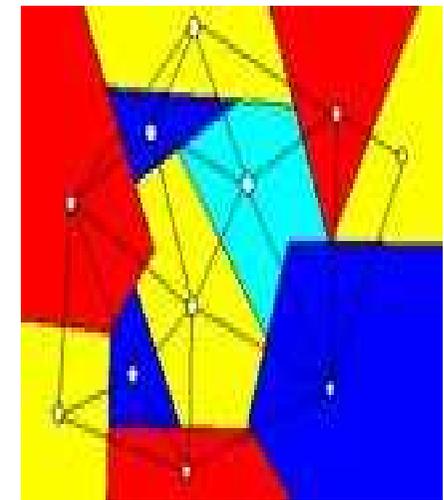
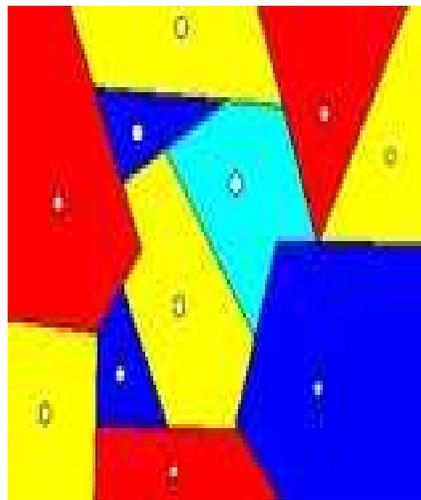
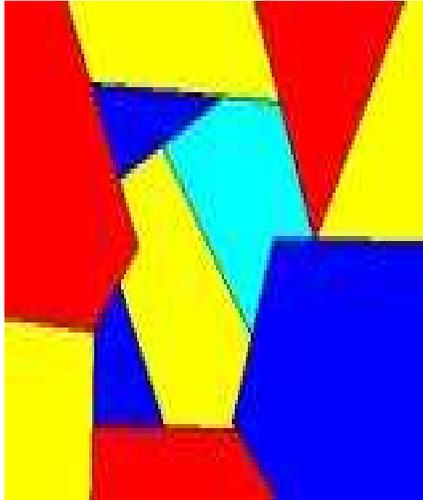


Wolfgang Haken
1976

On a compris que les différentes configurations des cartes peuvent être décrites à l'aide de la théorie des graphes, de la dimension de la configuration, représentée par le nombre des sommets du bord de l'anneau extérieur.

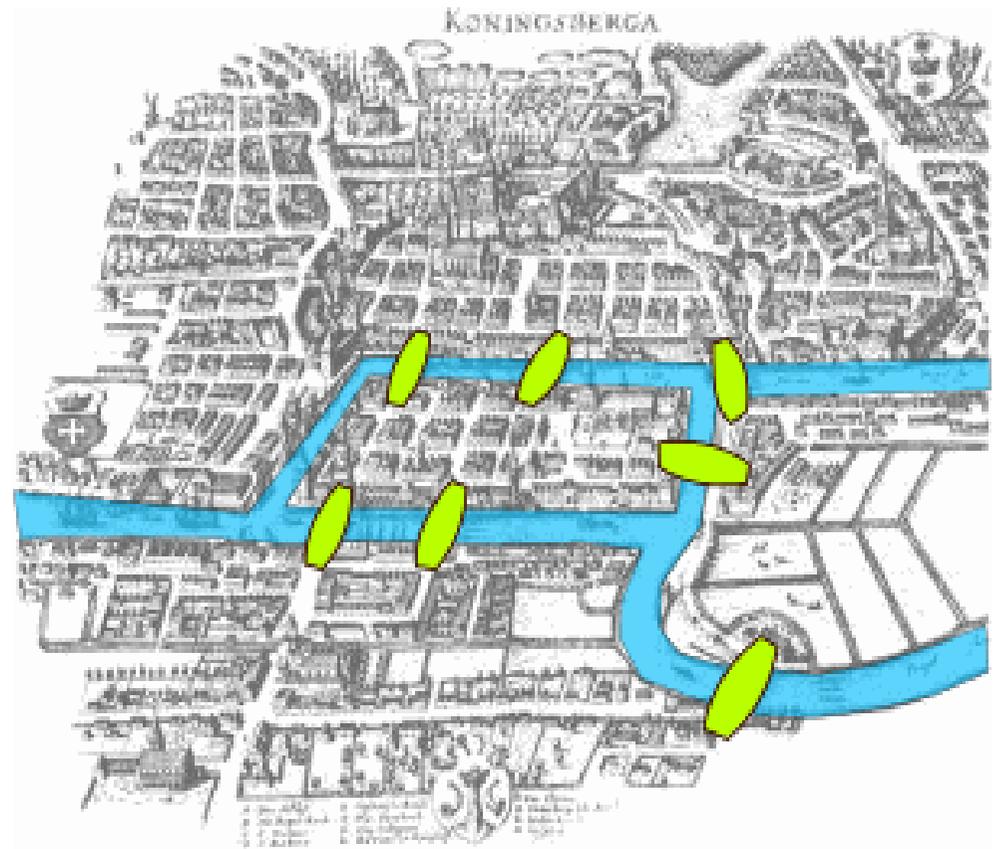
On a aussi fait allusion à l'affaire des querelles sur la fiabilité de l'utilisation des algorithmes informatiques pour le contrôle de l'exactitude de la conjecture.

des 4 couleurs aux graphes



Par la suite, nous avons traversé, au sens figuré, les ponts de **Königsberg**

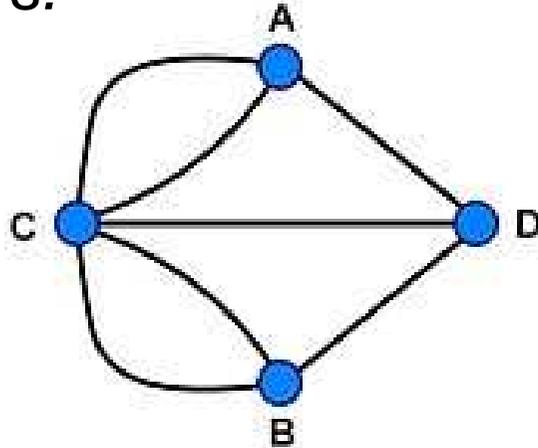
qui sont devenus célèbres car Euler a été le seul en mesure de résoudre le problème s'y rattachant (1732)



Euler compta le nombre de lignes (ponts) qui se concentrent dans chaque point (terre)

3, 3, 5 e 3 et démontra le théorème suivant:

N'importe quel graphe peut être parcouru si, et seulement si, tous les noeuds sont pairs, ou deux d'entre eux, sont impairs.



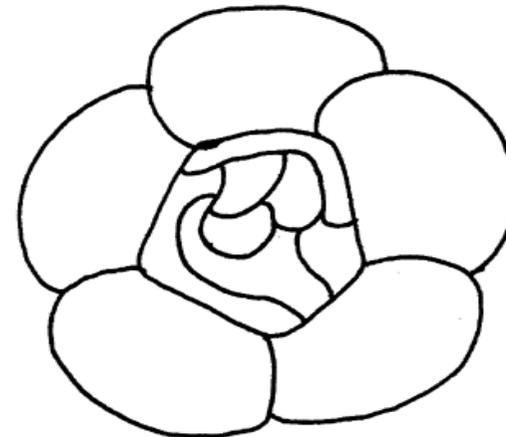
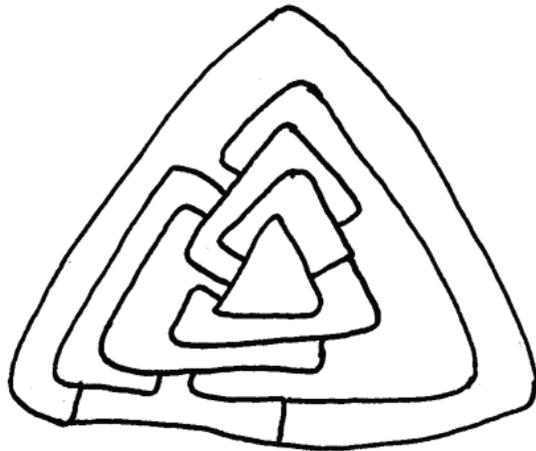
Pourquoi la théorie des graphes est intéressante?

- Fixer le chemin d'un véhicule de la poste de façon à distribuer le courrier d'une manière plus efficiente (Postman's Problem).
- Problèmes d'inspection et entretien de systèmes tels que: les réseaux électriques, téléphoniques, routiers.
- Problème de quatre couleurs
- Textes de circuits électroniques imprimés, allocation de variables et registres de la CPU, affectation de fréquences radiophoniques et télévisuelles
- et...LE VOYAGEUR DE COMMERCE : une fois donné un ensemble de villes, quel est le chemin le plus bref qui les traverse toutes en une seule fois?

Quelques problèmes proposés

Cartes et couleurs

Coloriez les cartes ci-dessous:

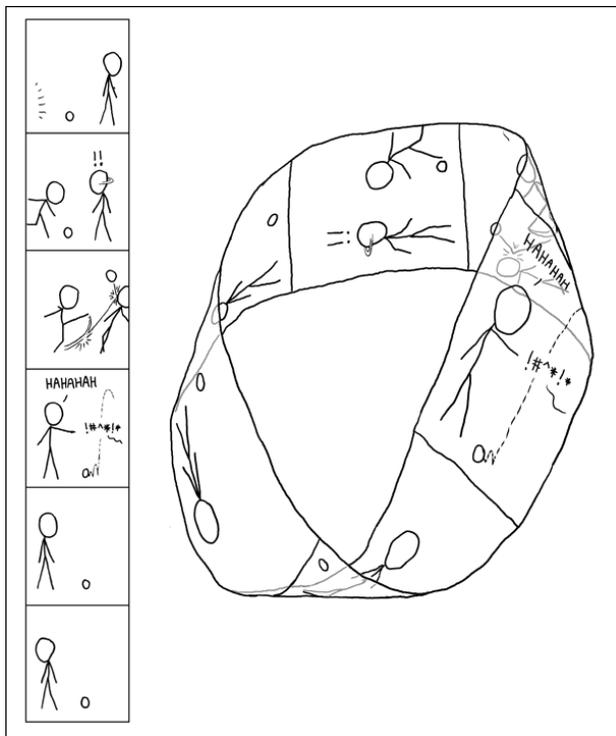


avec respectivement 3 et 4 couleurs.

Une histoire qui se répète

Regardez l'illustration, vous pouvez l'obtenir en collant convenablement un ruban en papier.

Vous devez écrire les strophes de la comptine sur le ruban de façon à ce que l'histoire puisse être lue à l'infini.



*Il était une fois un roi
Assis sur un sofa
Qui dit à sa servante:
«Raconte-moi une histoire»
Et sa servante commença.
Il était une fois un roi
Assis sur un sofa
Qui dit à sa servante:
«Raconte-moi une histoire»
Et la servante commença...*

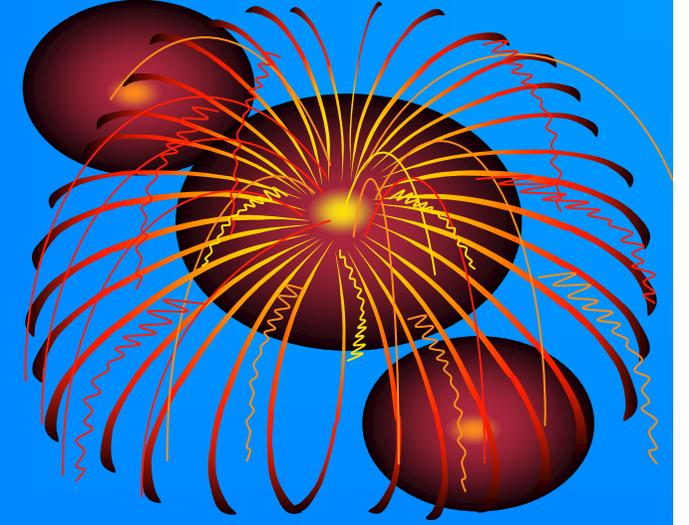
Le travail préliminaire à la distribution des prix a constitué l'occasion pour connaître l'activité que la collègue, Mme. Angela Aquilino, a développée dans son établissement au sein du Projet «Mathématiques et réalité»

Liceo Scientifico A. Romita



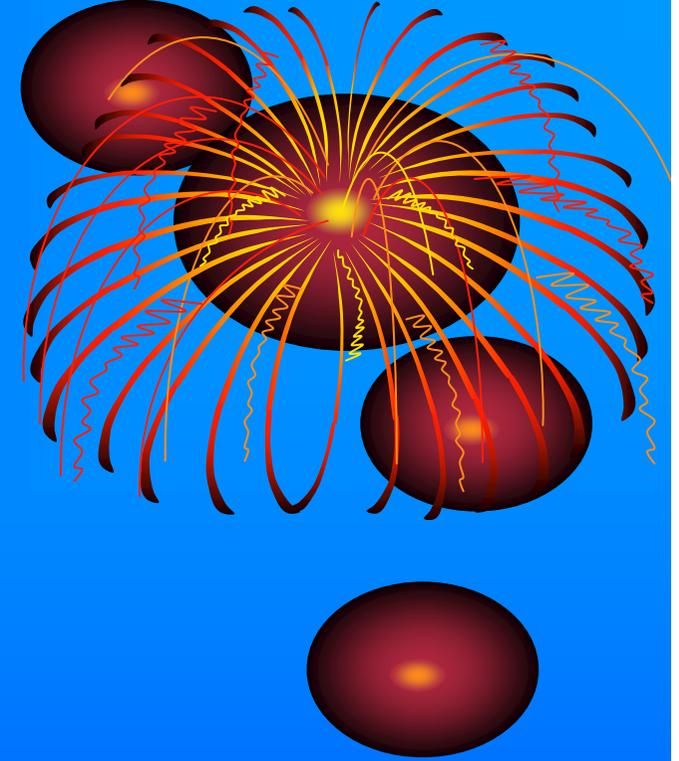
Classi 2^e

A.S. 2006/07



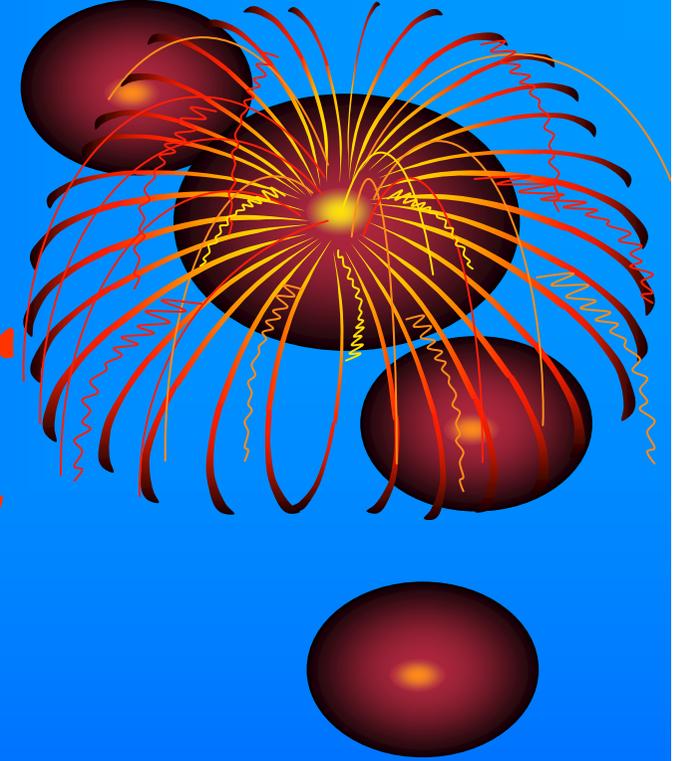
Colorions la carte de l'Afrique avec un nombre minimum de couleurs de façon à ce que deux états voisins aient des couleurs différentes.

Le choix de l'Afrique a été déterminé par l'activité de bénévolat réalisée par des élèves de l'établissement à l'aide de la vente d'objets qu'ils ont produits. Leur travail a permis de recueillir des fonds destinés à deux étudiants de Gorè au Tchad qui, de cette façon, ont pu continuer leurs études à l'Université.

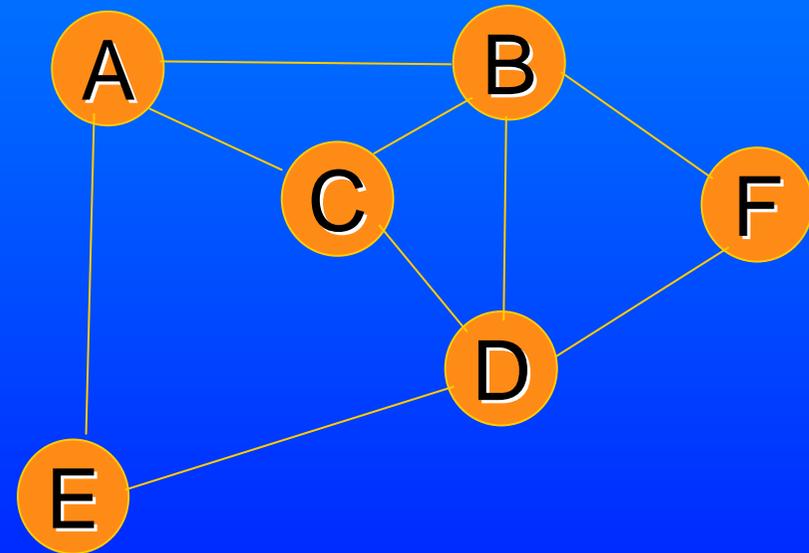


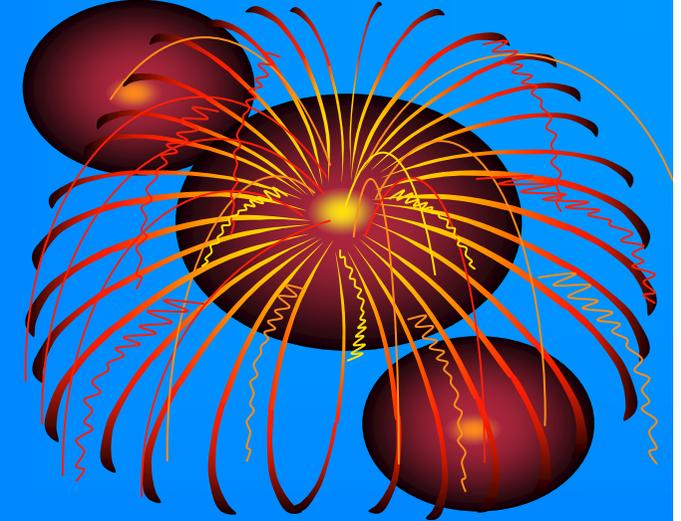
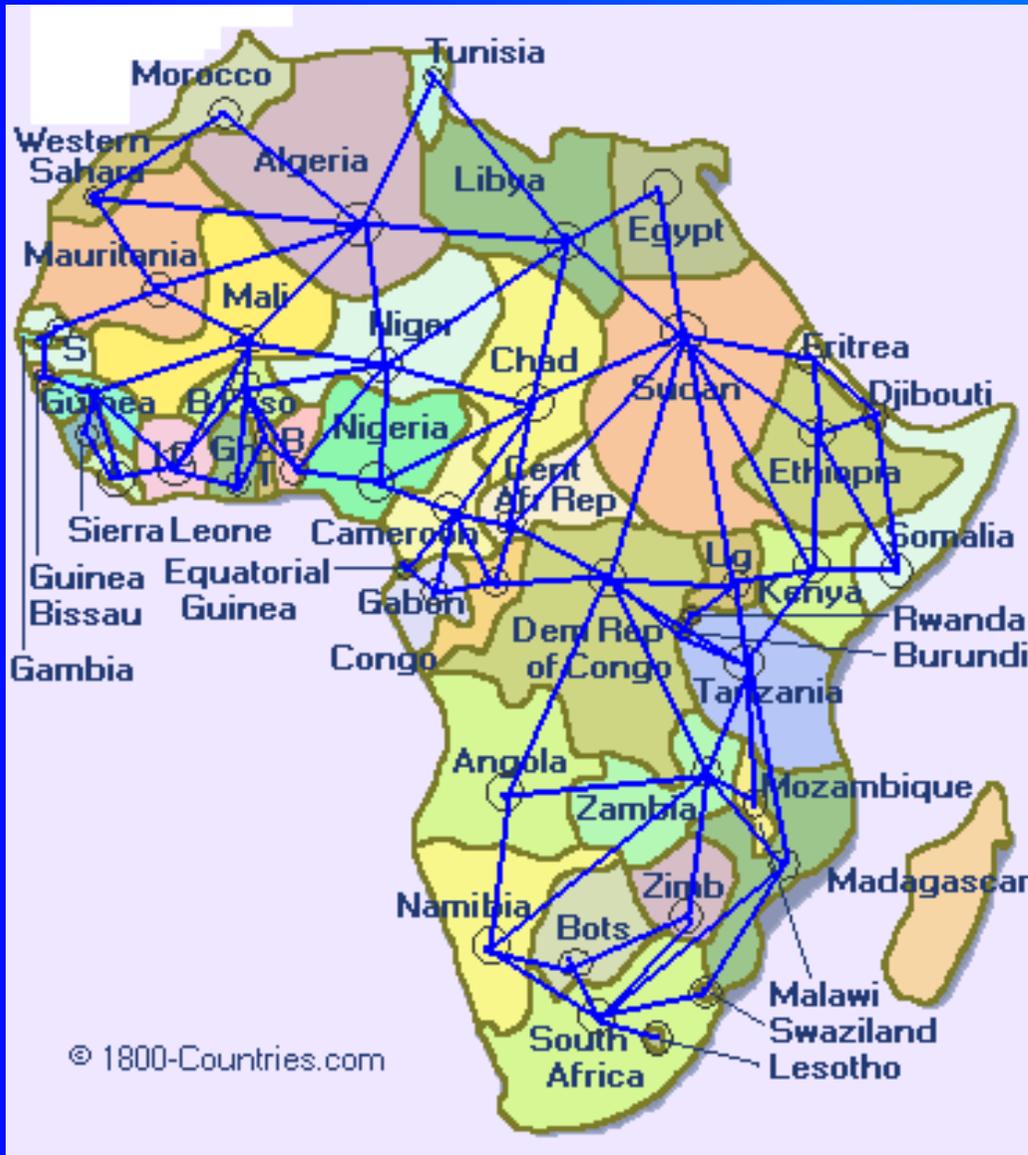
Nous pouvons également représenter le graphe à l'aide de la matrice booléenne qui y correspond.

Dans la matrice booléenne les noeuds du graphe marquent les lignes et les colonnes: dans la grille (x, y) apparaît 1 si le noeud x est lié au noeud y, Ou bien

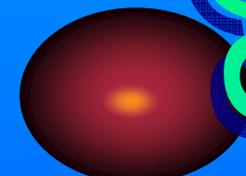


	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	1	0
B	1	0	1	1	0	1
C	1	1	0	1	0	0
D	0	1	1	0	1	1
E	1	0	0	1	0	0
F	0	1	0	1	0	0





*Grappe sur la carte
de géographie de
l'Afrique*



Matrice Booleana

Confini Africani

	marocco	algeria	tunisia	libia	egitto	sahara	mauritania	mali	niger	chad	nigeria	benin	togo	burchinafaso	costa d'avorio	liberia	sierra leone	ghana	guinea	abissau	se negal	ca merca
marocco	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
algeria	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
tunisia	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
libia	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
egitto	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
sahara	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
mauritania	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
mali	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
Niger	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
chad	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
nigeria	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
benin	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
togo	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
burchinafaso	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
costa d'avorio	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0

Solution

*D'après
l'analyse du
graphe, ainsi
que de la
matrice
booléenne, il
résulte que 4
couleurs au
moins sont
nécessaires.*

