Matematica senza Frontiere

Milano, 10 maggio 2008

La dimostrazione in Matematica

La démonstration dans les Mathématiques

Paola Gario

Dipartimento di Matematica "F. Enriques"

Università degli studi di Milano

Testo in italiano con didascalie in francese

“The Death of the Proof”

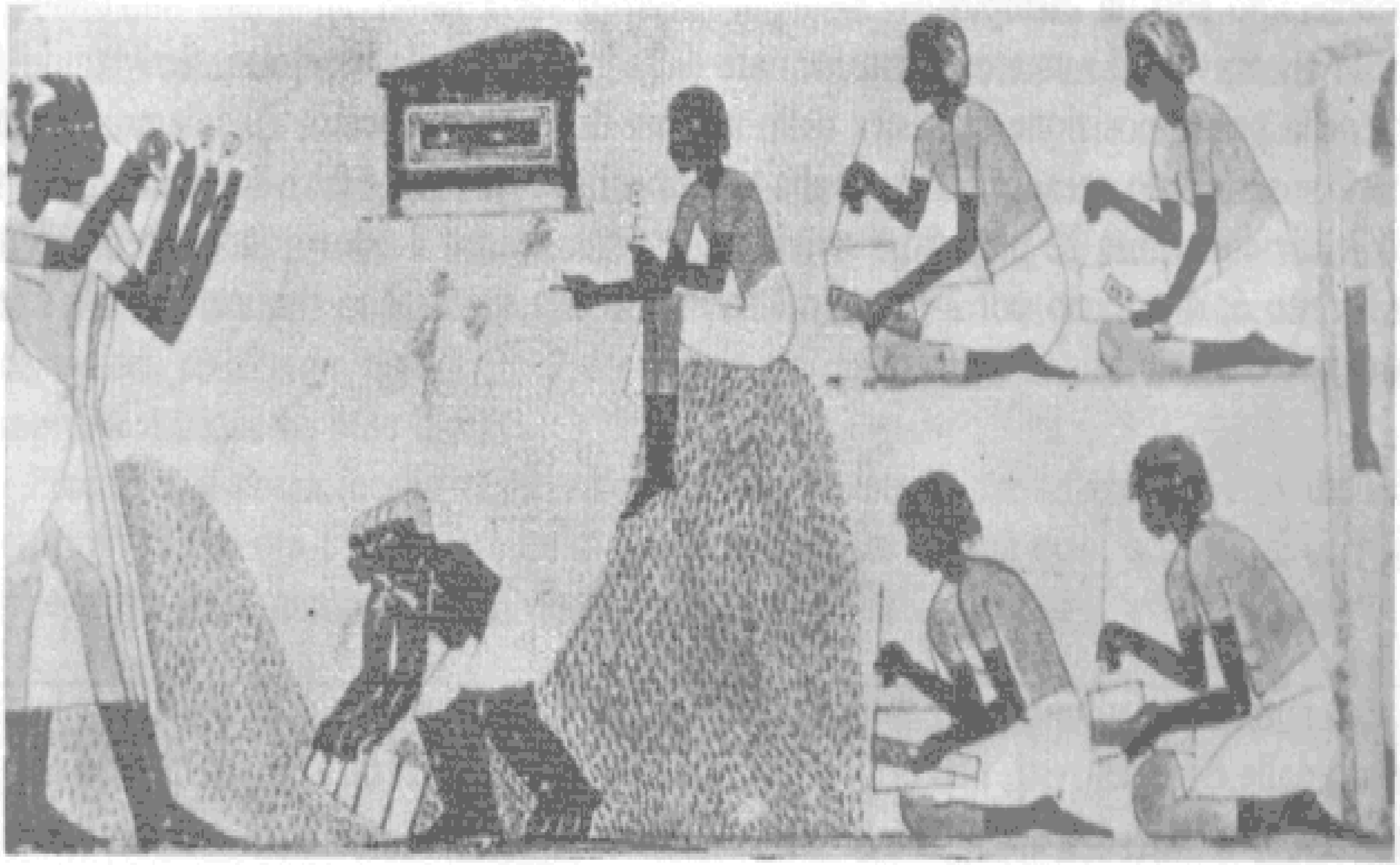
1993

(Scientific American; trad. it., Le Scienze, 1994)

Keith Devlin

entro i prossimi cinquant’anni penso che l’importanza della dimostrazione diminuirà

au cours des cinquante prochaines années
je pense que l’importance de la démonstration diminuera



La geo – metria

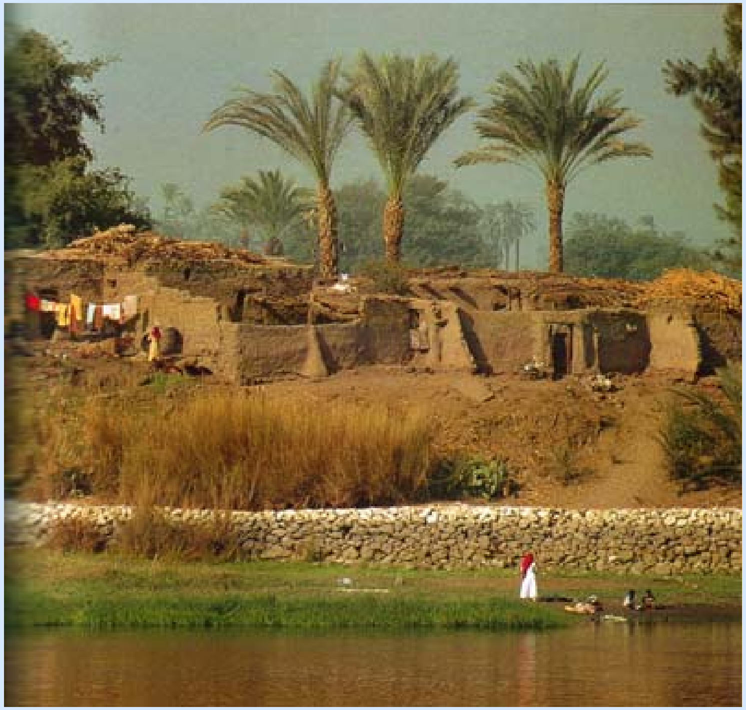
ovvero la **misurazione della terra**

nasce nell'antico Egitto

Le esondazioni
del Nilo costringevano a
ridefinire i confini dei
campi

d

On fait remonter l'origine de la géométrie égyptienne à la nécessité, après chaque inondation du Nil, de rédistribuer les champs à leur propriétaires



Il **papiro di Rhind**

Uno dei testi più importanti della matematica dell'antico Egitto, scritto dallo

scriba Ahmes (1650 a.C)

Le papyrus Rhind contient 87 problèmes résolus, d'arithmétique, d'algèbre et de géométrie, ècrits par le scribe Ahmès

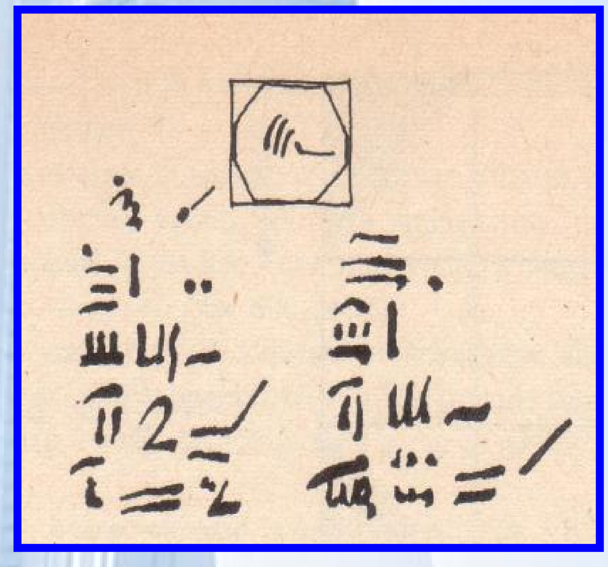
.

Contiene 87 problemi di matematica

Metodo per calcolare un pezzo di terra circolare di diametro 9 khet

Calcul de l’aire d’un cercle de diamètre 9 khet

Qual è la sua superficie di terra?



Tu devi

- sottrarre la nona parte del diametro, cioè 1 khet
- resto 8
- devi moltiplicare 8 otto volte
- diventa 64

Questa è la sua area di terra, 64 setat

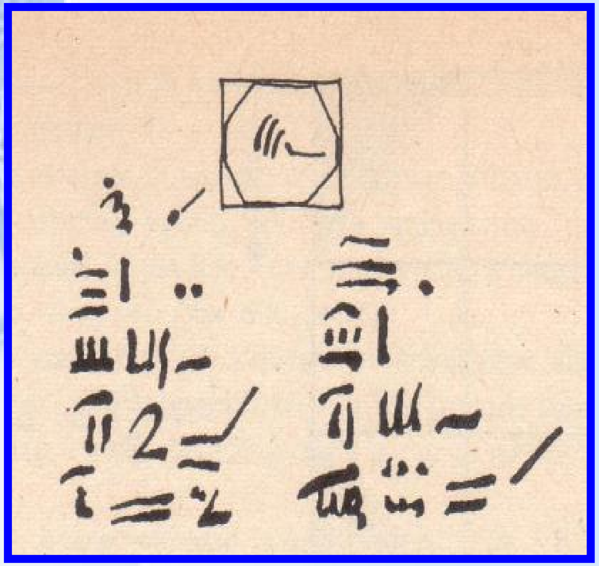
Ahmes dice **come si fa**

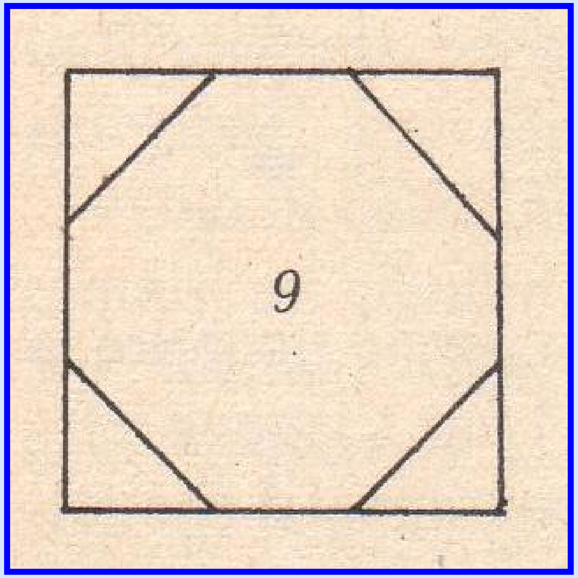
ma Ahmes **non** dice **perchè si fa così!**

Ahmès: Il dit comment on le fait mais il ne dit pas pourquoi on fait ainsi

Nel disegno c'è un indizio !

Il y a un indice!



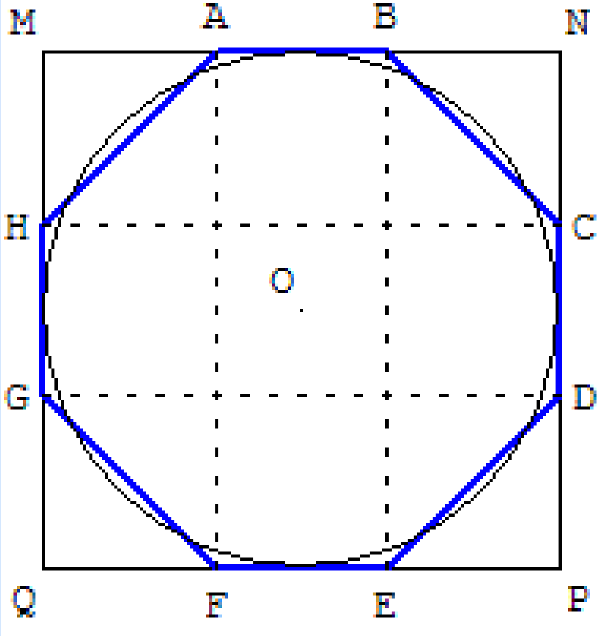


Qual è il ragionamento di Ahmes?

Dans un carré de côté 9 unité (khet) on inscrit un octagone. L'aire du cercle est approximativement égale à l'aire de l'octagone qui vaut 63 unité d'aire (setat). Enfin,

63 est approximativement

égale à l'aire d'un carré de côté 8 (64)



- Il cerchio e l'ottagono hanno **pressappoco** la stessa superficie
- L'area dell'ottagono è di 7 quadretti.
- poiché un quadretto ha area 1/9 d^2
- l'area dell'ottagono è 7/9 d^2 e quindi l'area dell'ottagono è 63
- un quadrato che ha area di **poco diversa**

è il quadrato di area 64, che ha lato 8

pressappoco … esattamente

approximativement … exactement

se 64 è l'area del cerchio di diametro 9,

quale valore si ottiene per π ?

l'aire du cercle de diamètre 9 est 64,

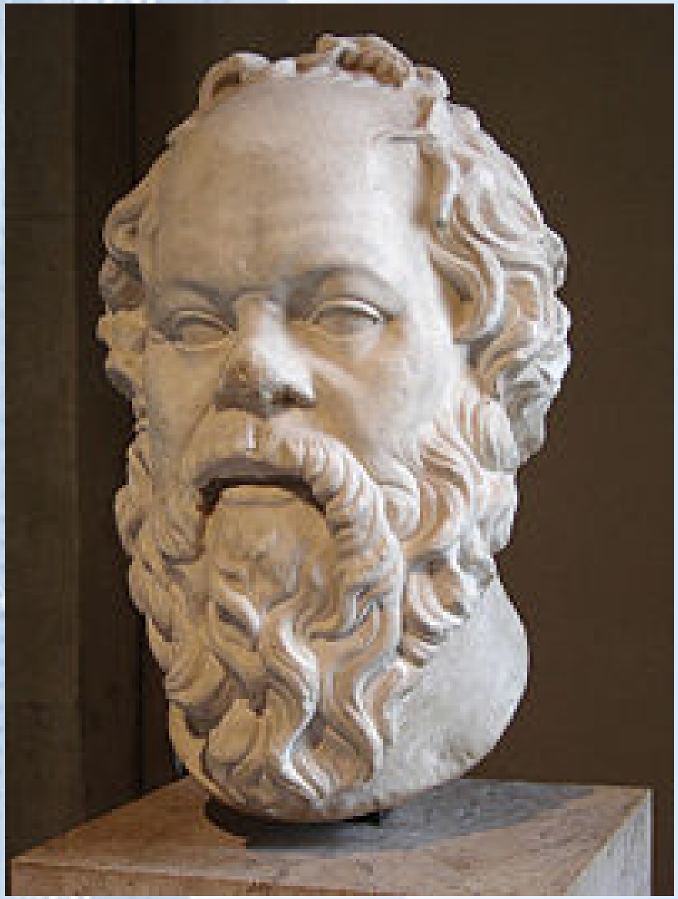
ce qui correspond à une valeur pour π…

$$(4 \times 64) / 9^2 = 3{,}1604938$$

invece di 3,1415926 …

Una dimostrazione senza postulati

Une démonstration sans postulats



Socrate et l’interrogation de l’esclave de Ménon

“Menone”

Platone (427-347 a.C)

arg gioni

s raisons

mostrami che l'è come tu dici

Mostramelo!

Se due piedi è un lato di questo spazio,

un lato del doppio spazio quanto sarà?

De quelle taille doit être le côté du carré de huit pieds?

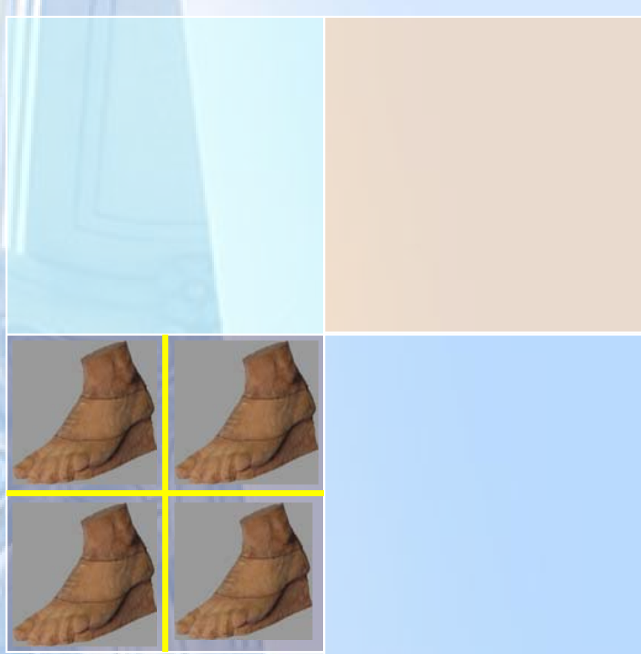
la risposta

la réponse de l'esclave

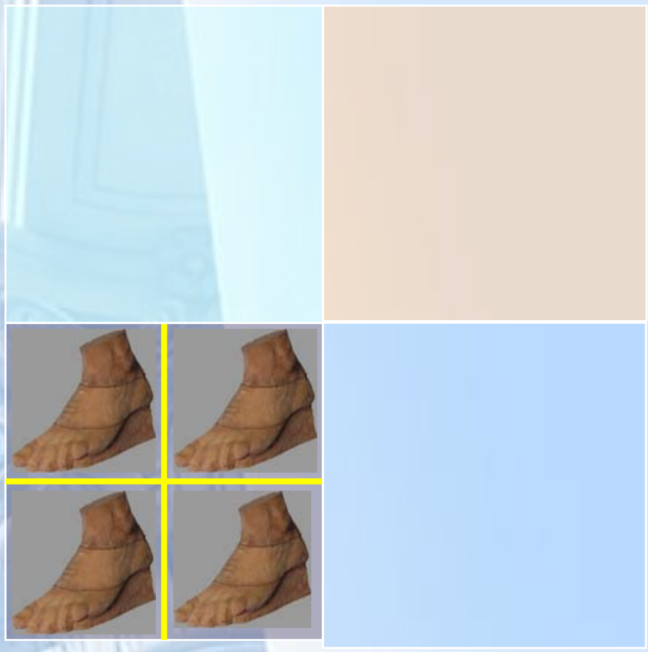
Area doppia, lato doppio! ovvio!

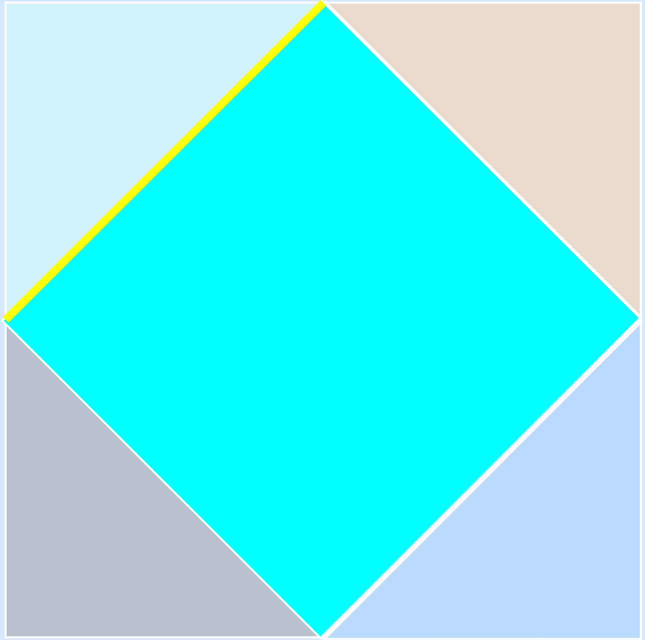
ha ragione chi ha buoni argomenti!

ha ragione chi ha buoni argomenti!



ha ragione chi ha buoni argomenti!





Non lo sapeva…, e come un sogno, le opinioni diritte si son destate in lui!

L'âme a vu l'ensemble de rèalités intelligibles
aussi bien que celle d'ici-bas
Il n'y a rien que l' âme n'ait appris

Ménon a étè invité à s'y voir comme dans un miroir

Pier Francesco Mola
Museo civico di Belle Arti
Lugano

Ragionare per assurdo

Raissonnement par l'absurde

Il rapporto tra grandezze commensurabili si esprime mediante numeri interi (Euclide, libro X, prop. 4)

Il rapporto tra la diagonale e il lato del quadrato sarebbe una frazione

Si riduce la frazione ai *minimi termini*: d / l

***d* e *l* non possono essere entrambi pari !!!!**

Ma non potranno essere entrambi dispari!!! Infatti dal teorema di Pitagora si ottiene

$$d^2=2\,l^2$$

che dice che *d* è pari:

***d* è pari e *l* è dispari.**

Tuttavia da d pari $=2m$, si ottiene $4m^2=2l^2$ $2m^2= l^2$. e quindi

***l* è pari !!!**

In conclusione *l* è pari ed è dispari !!!

Aristotele

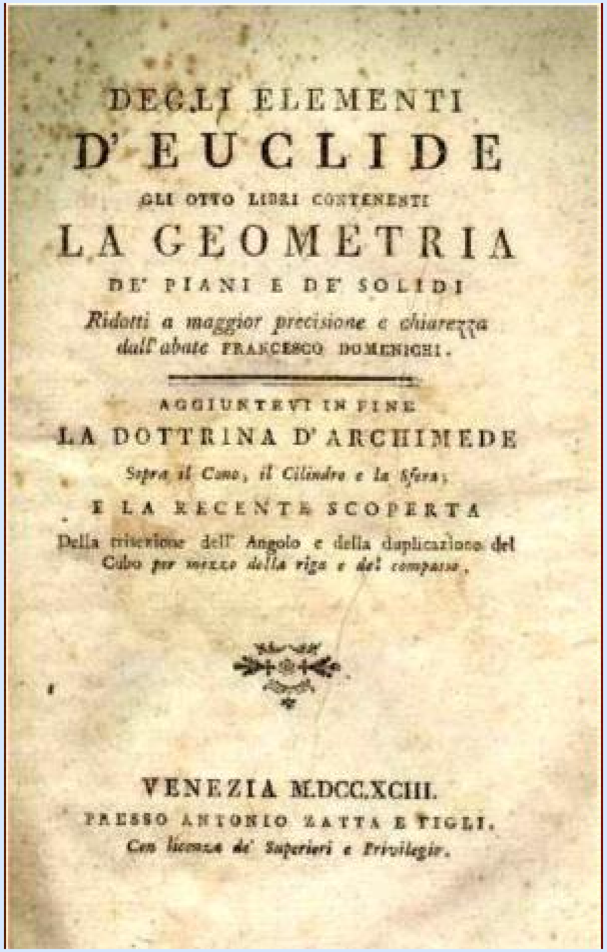
La diagonale è
incommensurabile al lato
perché il porre la sua
commensurabilità renderebbe
i pari uguali ai dispari

“Analytici primi” 41a 26

La dimostrazione dell'esistenza di un oggetto geometrico

La démonstration de l'existence d'un object de la géométrie

Gli *"Elementi"* di Euclide (circa 300 a.C.)


DEGLI ELEMENTI
D' EUCLIDE
GLI OTTO LIBRI CONTENENTI
LA GEOMETRIA
DE' PIANI E DE' SOLIDI
Ridotti a maggior precisione e chiarezza dall' abate FRANCESCO DOMENICHI.

AGGIUNTEVI IN FINE
LA DOTTRINA D' ARCHIMEDE
Sopra il Cono, il Cilindro e la Sfera;
E LA RECENTE SCOPERTA
Della trisezione dell' Angolo e della duplicazione del Cubo per mezzo della riga e del compasso.

VENEZIA M.DCC.XCIII.
PRESSO ANTONIO ZATTA E FIGLI.
Con licenza de' Superiori e Privilegio.

Les "Élements" d'Euclide: l'apogée de la création mathématique en Grèce classique

La mathématique grecque se distingue par son caractère démonstratif et déductif, forgé dans le feu des discussions

I postulati I , II e III di Euclide

Les trois premiers postulats d’Euclide: la règle et le compas

le **regole** per

le costruzioni
con riga e compasso

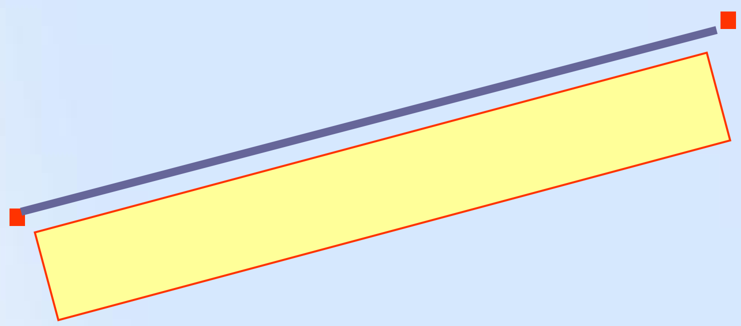
con cui si dimostra

l’esistenza
di un
oggetto geometrico

Postulato I

E che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto

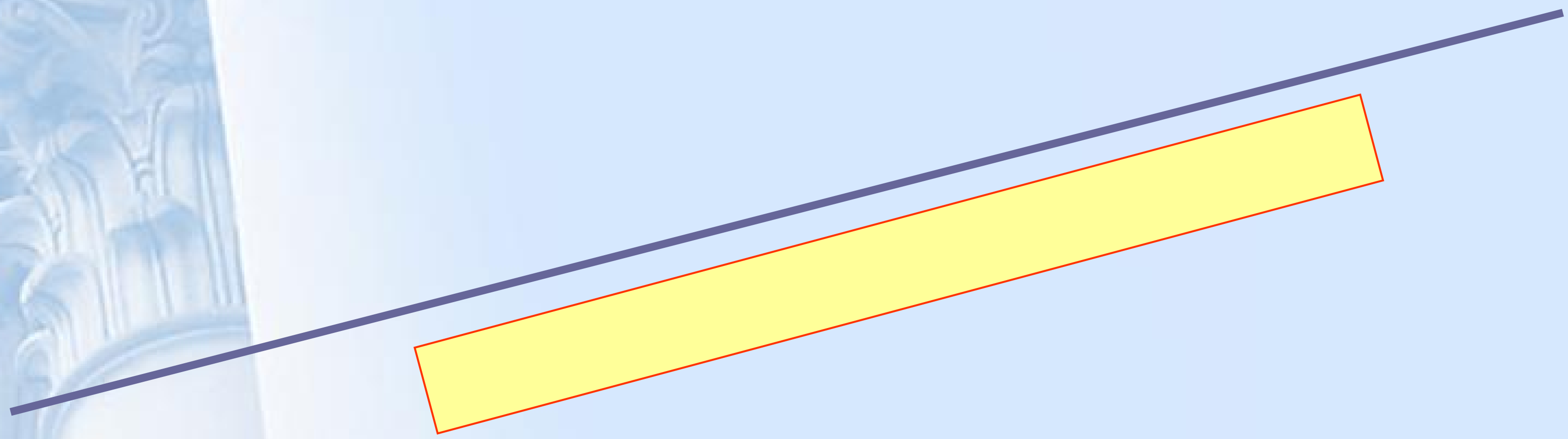
qu'on puisse conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque



Postulato II

E che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta

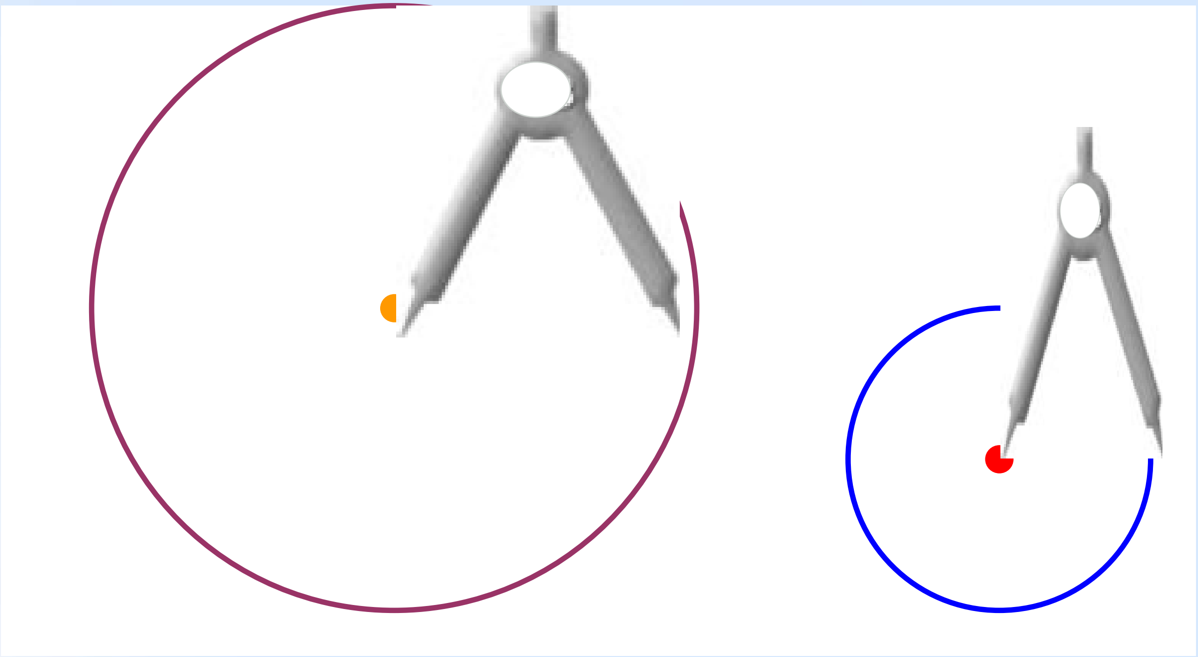
qu'on puisse prolonger continuellement, selon sa direction, une droite finie en une droite



Postulato III

E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni raggio

que d'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, on puisse décrire une circonférence quelconque



La dimostrazione per esaustione

La démonstration par exhaustion

serve a validare risultati ottenuti per altra via

rende rigorosi risultati ottenuti attraverso passaggi al "limite"

libera la matematica dalle difficolta' legate all' ∞

Dimostrare per esaustione che due aree Q e Q' del piano sono uguali

$Q = Q'$ sono uguali:

- se per ogni A e B tali che $A < Q < B$
  si ha anche che $A < Q' < B$
- e se la differenza $B - A$
  puo' essere resa piccola quanto si vuole.

Infatti, se **per assurdo** fosse $Q > Q'$

dalle ipotesi si otterrebbe $B > Q > Q' > A$

da cui segue $B - A > Q - Q'$

Se $B - A > Q - Q'$

non è possibile
rendere $B-A$

PICCOLA quanto
si vuole !

La dimostrazione per esaustione

Archimede (287- 212 a.C.)
ne sarà il grande protagonista

Domenico Fetti
Pinacoteca Alte Meister , Dresda

Ma, … per usare l'esaustione serve conoscere **il risultato** !

il mio antenato
come scopriva
i risultati
?!

Il metodo meccanico di Archimede

Comprendre certaines réalités mathématiques par le biais de la mécanique

des propriétée se connaissent d'abord par la mécanique avant de pouvoir les démontrer géométriquement

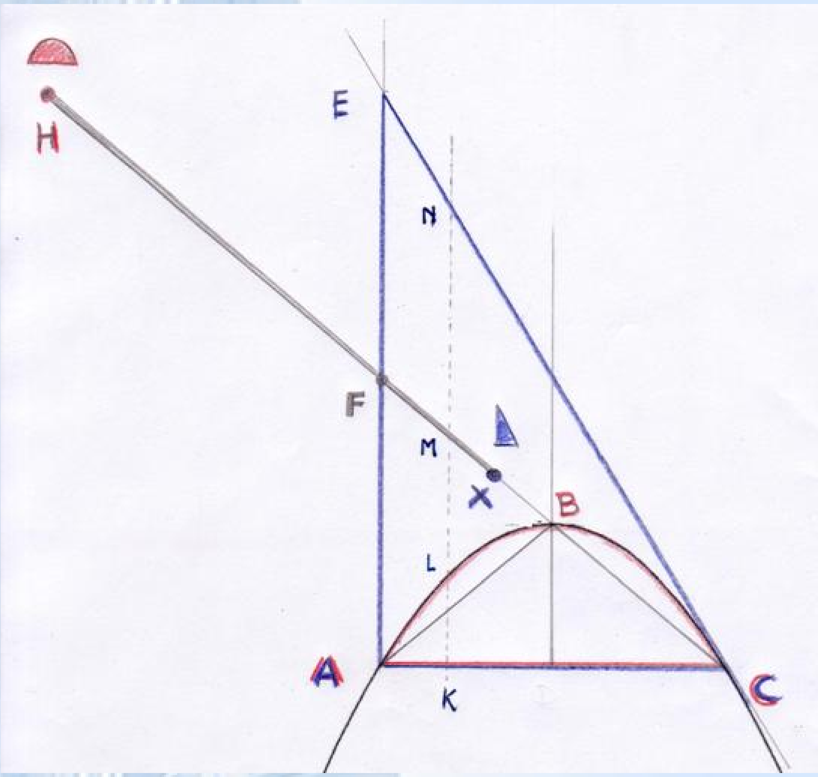
1906
la scoperta di un palinsesto

"Il Metodo"
di Archimede

Walters Art Museum,Baltimora
(in restauro presso)

Archimede e la quadratura della parabola

Archimède: la quadrature de la parabole



Une loi de la statique

deux masses, par rapport à un point d'appui, s'equilibrent selon des distances inversement proportionnelles à ces masses

Par des utiles géométrique il démontre que

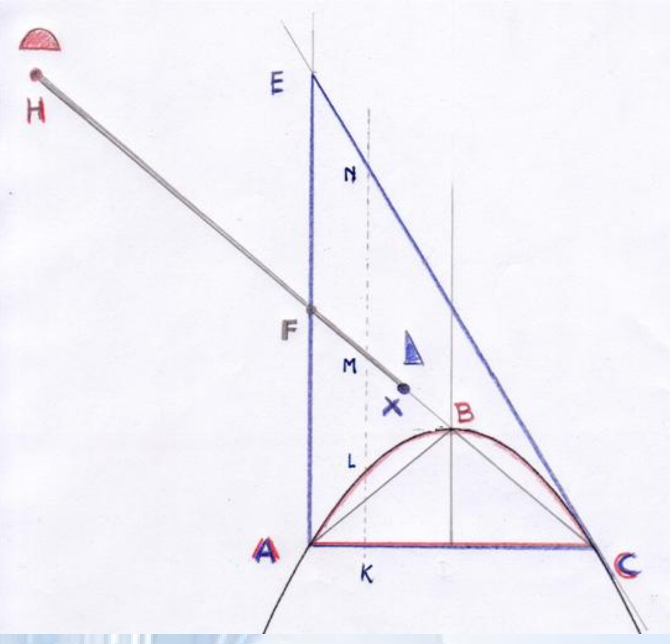
$$KL : KN = FM : FH$$

et donc

$$KL \times FH = KN \times FM$$

C'est le lien entre la statique et la géométrie qui va conduire Archimède à la découverte

tout segment compris entre une droite et une parabole est equivalent aux 4/3 du triangle ayant même base et même hauteur que le segment



Le levier est (*H*, *F*, *X*), étant *X* le centre de gravité du triangle *ACE* et *FH = FC*

le segment de parabole (appliqué en H)
equilibre le triangle *ACE* (appliqué en *X*)
(la masse de ce triangle peut être concentrée en *X*)

Puisque *X* partage *CF* dans la proportion 1/3 et 2/3, l'aire du segment de parabole est 1/3 de l'aire du triangle *ACE*

L'aire du triangle ACB est ¼ de l'aire du triangle *ACE*

L'aire du segment de parabole est 4/3 de l'aire du triangle *ACB*

un torneo medioevale

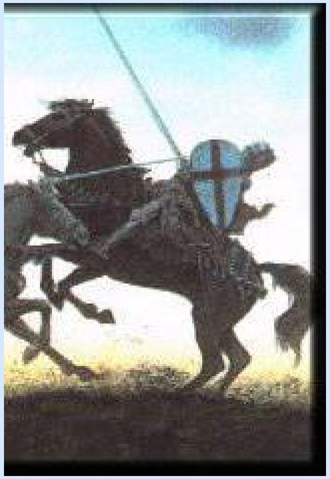
1025 circa

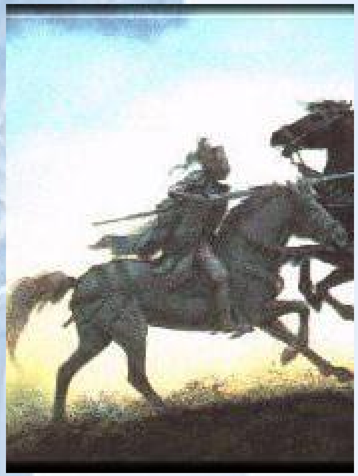
Une dispute entre deux maîtres: le rapport entre la diagonale et le côté du carré

qual è il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato?

le rapport entre la diagonale et le côté du carré

Ragimboldo
di Colonia
17/12





Radolfo
di Liegi 7/5

qual è il rapporto tra
la diagonale e il lato di un quadrato?

I contendenti ignorano che il rapporto non è esprimibile in numeri interi

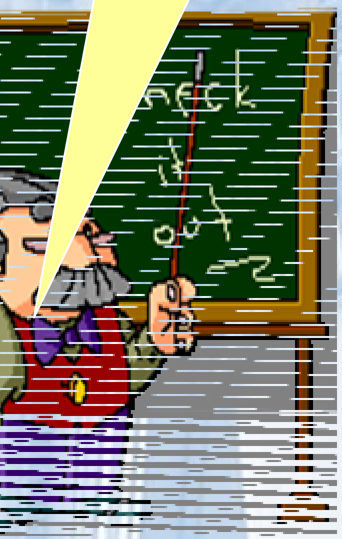
La perdita di un quadro di riferimento concettuale non permette di decidere

matematica di **precisione** e
matematica di **approssimazione**

$\sqrt{2}$

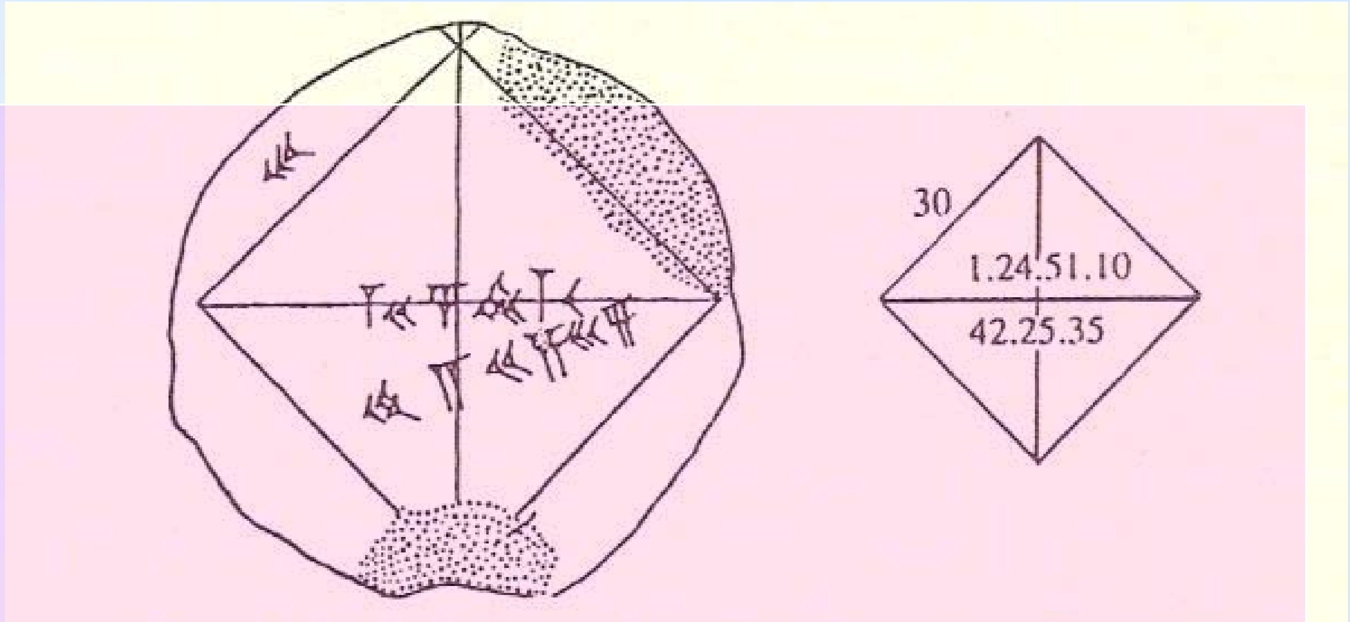
con la calcolatrice tascabile

1.4142135 …



Radolfo di Liegi 7 / 5 = **1.4**

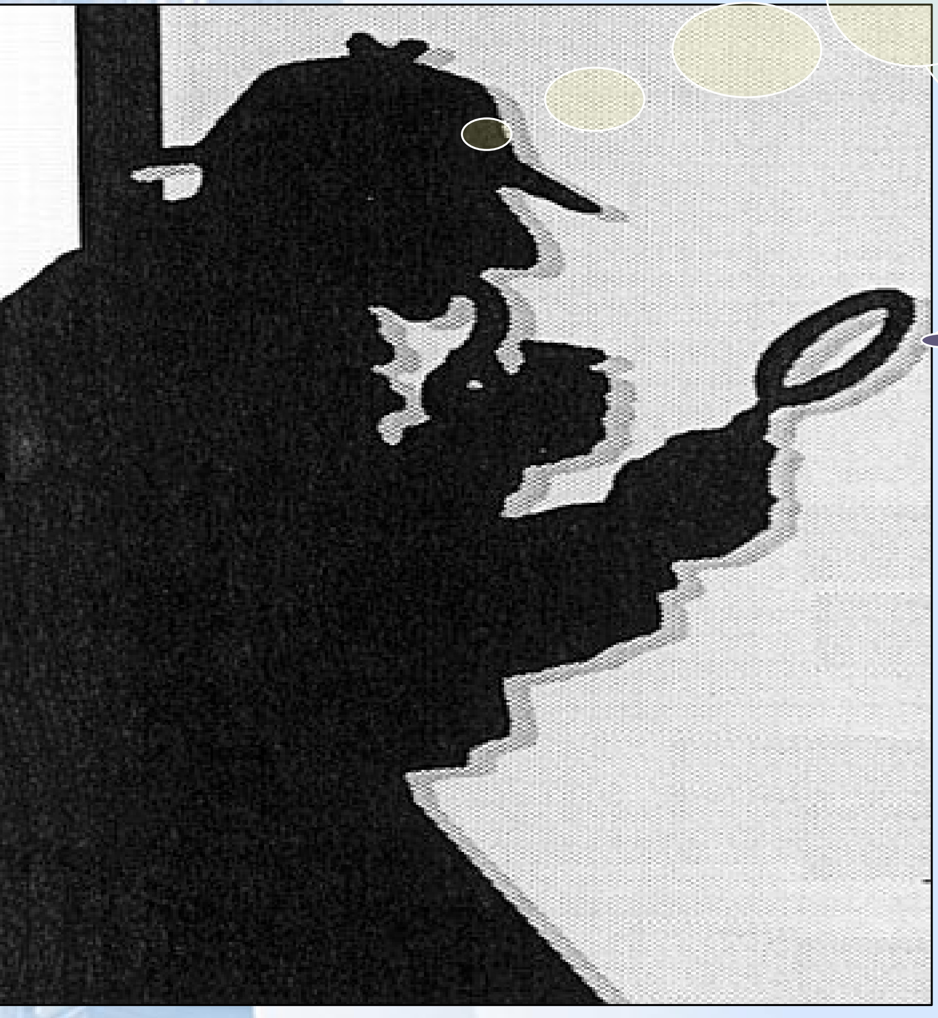
Ragimboldo di Colonia 17/12 = **1.41<u>6</u>**



(*da: Neugeubauer & Sachs*, Mathematical Cuneiform Texts, *American Oriental Society, Yale Babylonian Collection)* dimostrazione?

non ve n'è più traccia

et la démonstration?
Au moyen âge, **il n’y en a plus de trace**



e oggi nella scuola...?

et à l’école?
Le publique donnera la reponse

Dimostrazioni senza parole …

Les dèmonstrations sans paroles …

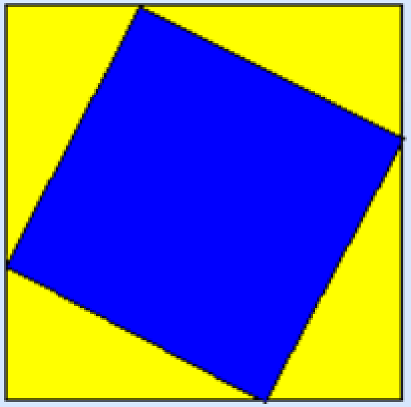
in matematica i diagrammi facilitano i "nostri esperimenti mentali"

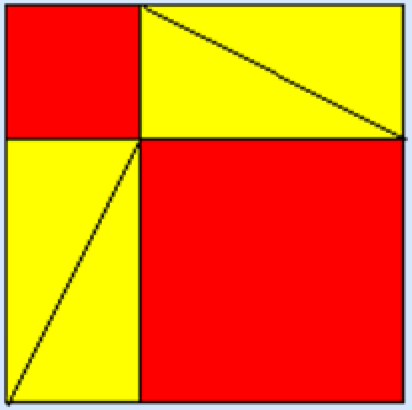
dans les mathémtiques les diagramme facilitent "nos expérimentations mentales"

(Hao Wang , *Dalla matematica alla filosofia*, 1984)

questi diagrammi ci parlano?

Ces diagrammes, nous communiquent-ils quelque chose ?



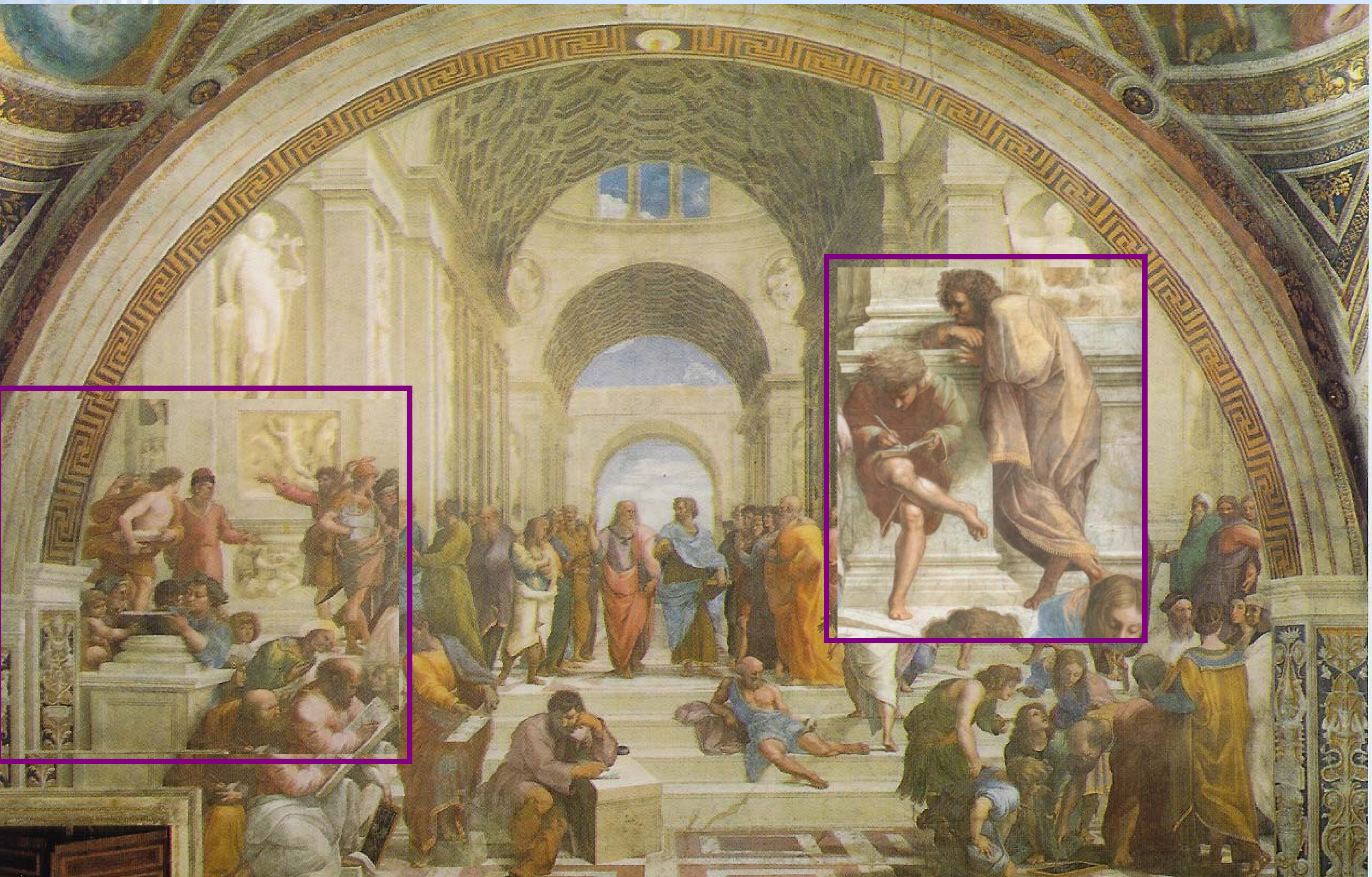


Nell'accettare questi diagrammi come una dimostrazione si fa riferimento a un **preciso quadro concettuale**

En accepptant cette démonstration, implicitement on se réfère à un cadre conceptuel

i protagonisti

una lezione *dia-logica*



FINE

Letture suggerite

U. Bottazzini, *Filosofia e Matematica,* in "La Filosofia. La Filosofia e le Scienze", a cura di Paolo Rossi, vol. I- , IV, Garzanti, Milano 1996, II, 11-50.

F. Bellissima- Paglia P. , "La verità trasmessa", Biblioteca Universale Sansoni, Firenze 1996.

G. Lolli, "QED. Fenomenologia della dimostrazione", Bollati Boringhieri, Torino 2005.

Nota

Le diapositive e le animazioni che riguardano il problema del papiro di Rhind, la dimostrazione della duplicazione del quadrato e i postulati della riga e del compasso sono riprese dalle presentazioni del Laboratorio

La dimostrazione in contesto geometrico.
Perché dimostrare ciò che è evidente?
Paola Gario - Flavia Giannoli
(Progetto Lauree Scientifiche, 2005-2006)

Il laboratorio introduce e sviluppa le costruzioni con riga e compasso per l'avvio all'attività dimostrativa.

Obiettivo del laboratorio è di introdurre l'allievo all'attività dimostrativa e di renderlo consapevole della sua importanza.

Un incontro è dedicato alla nascita del concetto di dimostrazione. Per esemplificare il passaggio dalla matematica del "come si fa" alla matematica del "perché si fa", si propongono attività didattiche costruite intorno al problema del papiro di Rhind e al problema tratto dal "Menone" di Platone, di cui è stata prodotta anche una trasposizione teatrale basata sulla versione di Francesco Acri (Einaudi, Torino 1970).

I brani in francese riportati in corsivo sono tratti da A. Dahan – J. Peiffer, "Une histoire des mathématiques. Routes et dédales", Edition du Seuil, 1986.

Le immagini che non sono prodotte dall'autore, sono state tratte dal web.