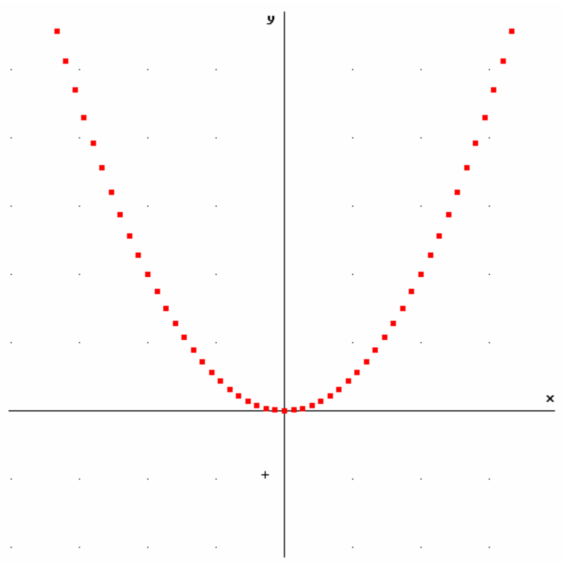
Jeux d'eau

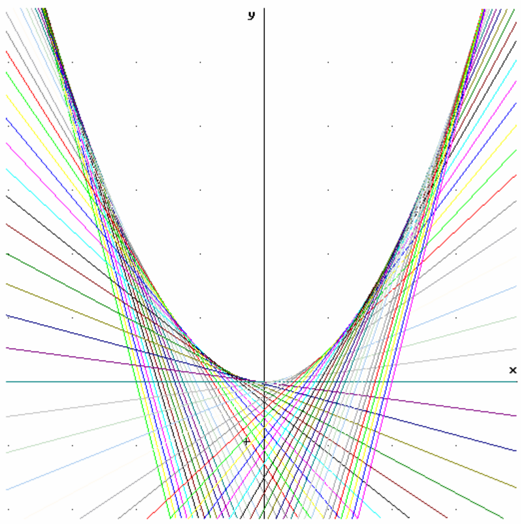
Claudio Citrini - Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano
10/5/2008
Mathématiques sans Frontières

Il y a longtemps, j'ai suivi plusieurs thèses de licence en didactique, dont une[1] était plaisante parce qu'elle employait un moyen un peu étrange pour faire de la mathématique, c'est à dire de l'eau. Le but de cette thèse était l'étude de l'enveloppe d'une famille *F* de courbes.

Enveloppes

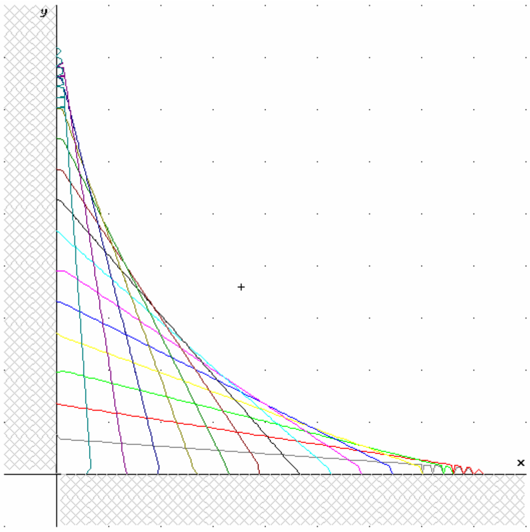
L'enveloppe de *F* est une nouvelle courbe Γ qui est en chaque point tangente à une courbe de *F*. Il est bien connu qu'on peut décrire une courbe Γ en donnant toutes ses droites tangentes au lieu que ses points: la dualité est un chapitre fort élégant dans la théorie des coniques.
Du point de vue géométrique, cette description donne en général une vision plus suggestive, parce que l'œil aperçoit moins les discontinuités parmi les tangentes que parmi les points.





Il est aisé de construire des enveloppes de droites, même sans un crayon, mais simplement en pliant du papier ou en employant une aiguille et du fil.
Par exemple, si l'on partage en parties égales deux segments consécutifs quelconques AS et SB et on les numérote A = 0, 1, …n = S = 0, 1, …n = B on peut dessiner l'arc AB de la parabole tangente en A et B aux deux segments en joignant les points avec le même nombre.
Dans la figure les segments sont perpendiculaires et égaux, la parabole est $(x - y)^2 + 1 = 2\cdot(x + y)$ et les points A(0, 1) V(0, 0) et B(1, 0); les tangentes ont l'équation $\frac{x}{t} + \frac{y}{1-t} = 1$.
Voir par exemple http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ParabolaMesh.shtml

[1] Giovanna Castelli, 1999.



Du point de vue analytique, le problème des enveloppes est traité en général dans les courses universitaires.
Si la famille de courbes, dépendant d'un paramètre t, est donnée par l'équation implicite
f(x, y ; t) = 0, on démontre que l'enveloppe satisfait le système

$$\begin{cases} f(x,y;t) & = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y;t)}{\partial t} & = 0 \end{cases} .$$

Il y a naturellement des hypothèses, mais je ne veux faire de la théorie ici, mais plus simplement donner des idées, qui puissent être employées dans un laboratoire didactique à un niveau scolaire quelconque (à peu près…).

Je vais montrer trois exemples, qui sont bien connus mais qui sont amusants parce qu'on peut les réaliser avec des moyens assez simples.
Il y a deux courbes faciles à obtenir avec de l'eau: la parabole e la circonférence.

Trous dans le barrage

La trajectoire d'un objet soumis à la force de gravité est une parabole, mais on ne peut pas la voir toute dessinée dans l'air; au contraire, un jet d'eau décrit une parabole qui reste fixe et parfaitement visible.
Voilà donc un premier exemple: si dans la paroi d'un récipient (un bassin ou une baignoire, n'importe) où il y a de l'eau ayant un niveau constant H on pratique un trou à l'hauteur $h < H$, on obtient un jet dont les équations sont

$$x = vt$$
$$y = h - \tfrac{1}{2} gt^2 .$$

On pourrait choisir un repère où $H = 0$, mais il n'y a aucun vrai avantage dans les calculs.
La vitesse horizontale v à laquelle le jet se départ (calculée moyennant le théorème de conservation de l'énergie) est donnée par la formule

$v = \sqrt{2g(H-h)}$.

En éliminant le temps t on trouve l'équation de la parabole décrite par le jet, qui est

$$y = h - \frac{x^2}{4(H-h)}$$

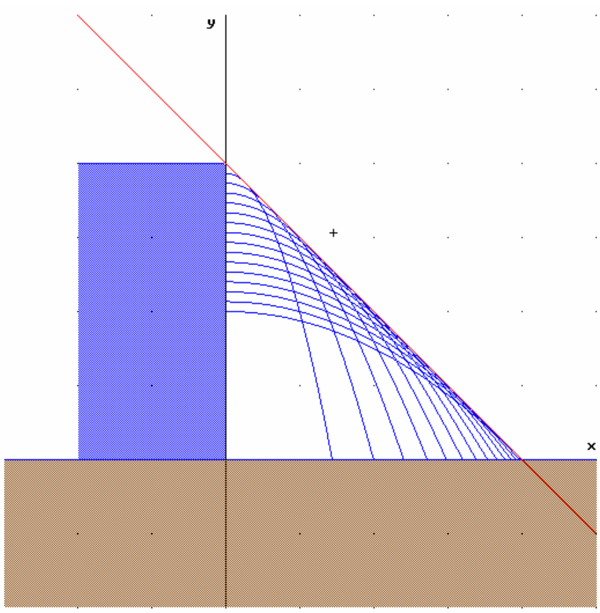
(on peut noter que la l'accélération de gravité g a disparu). Une dérivation partielle par respect au paramètre h donne

$$0 = 1 - \frac{x^2}{4(H-h)^2}$$

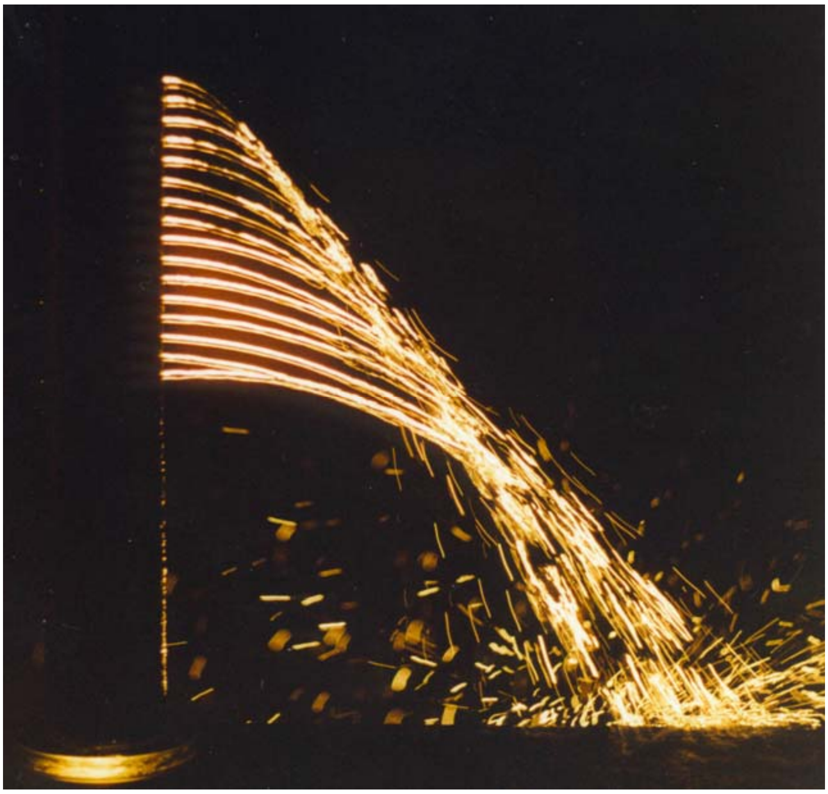
et l'élimination de h porte tout de suite à l'équation de l'enveloppe, qui est simplement

$$y = H - x,$$

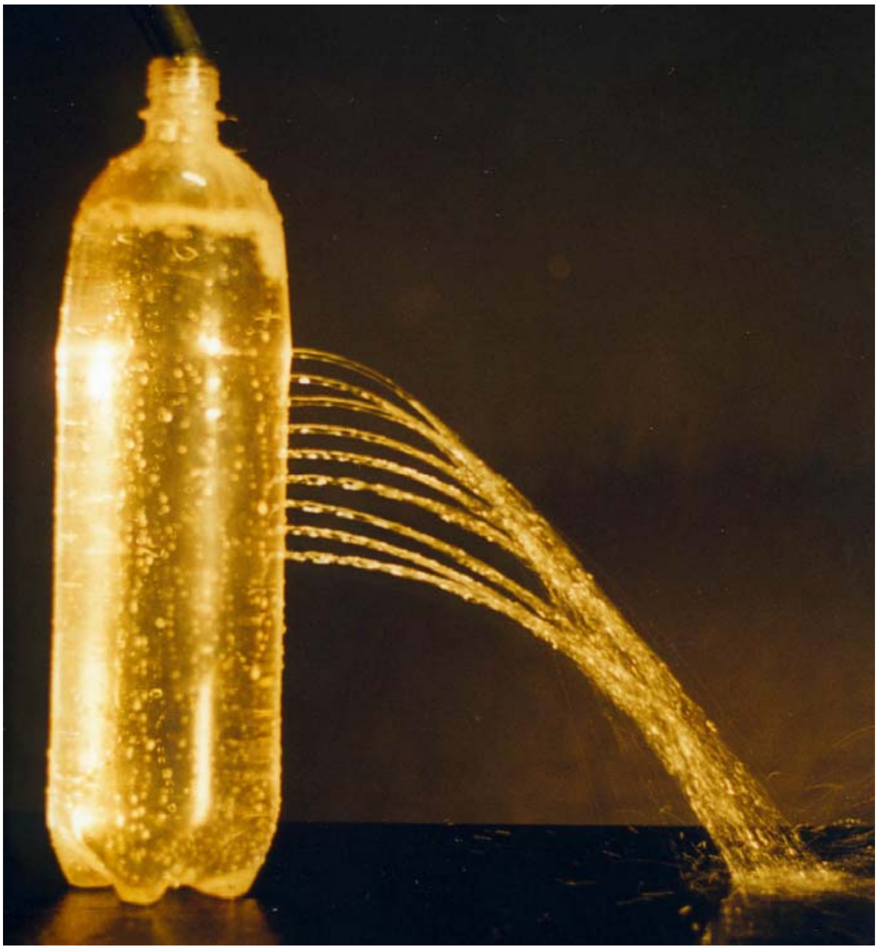
c'est à dire une droite ayant la direction de la bissectrice des axes (sur la Terre ou sur la Lune, c'est le même!).



La réalisation de cette expérience est simple, et donne une figure comme ça:



ou encore plus simplement comme la suivante, qui peut être réalisée même à la maison (si maman tolère…).



Artillerie

Supposons que un canon (à l'origine des axes) lance ses projectiles à une vitesse donnée v, dans une direction (hausse) qui forme un angle α arbitraire avec l'horizontale. Les lois de mouvement du projectile, sous certaines hypothèses physiques qui sont bien connues, sont

$x = v \cos \alpha\, t$
$y = v \sin \alpha\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$.

La trajectoire est pourtant la parabole ayant équation

$y = \mathrm{tg}\, \alpha\, x - \tfrac{1}{2} g\, (x / v \cos \alpha)^2$

ou, en posant $m = \mathrm{tg}\, \alpha$:

$y = m\, x - \tfrac{1}{2}\, (1 + m^2)\, g\, x^2 / v^2$

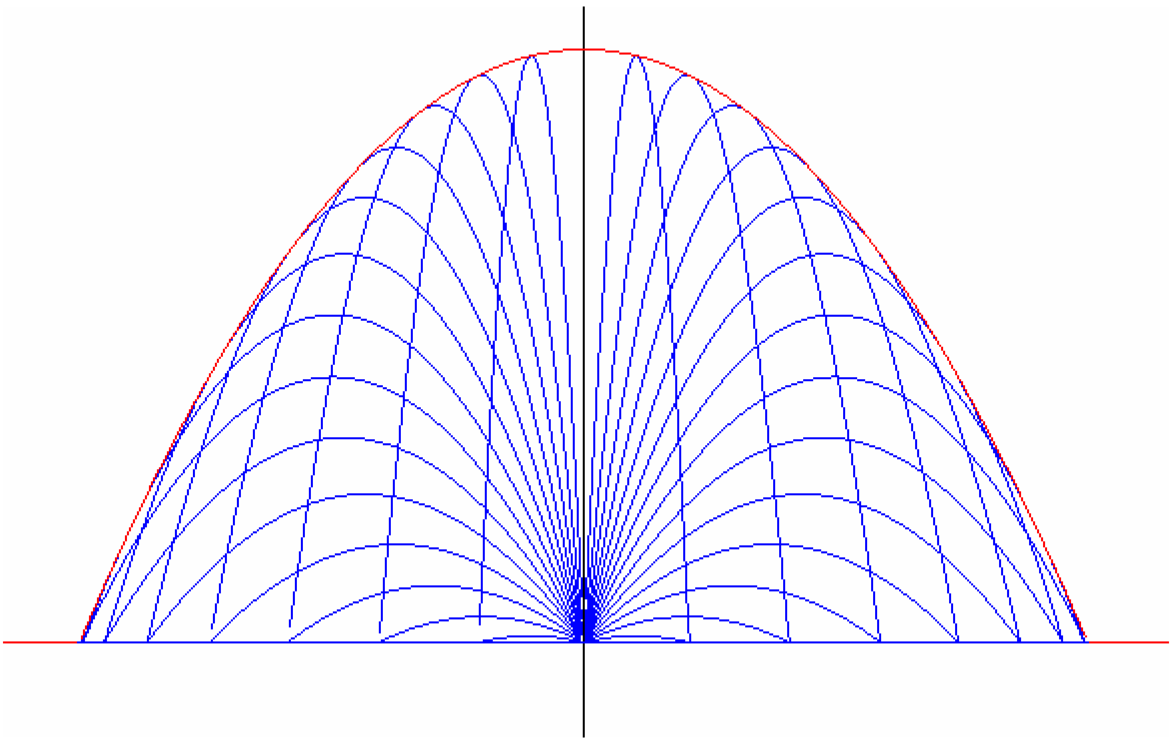
Si l'on dérive par respect à m on a:

$0 = x - m\, g\, x^2 / v^2$

d'où $m = v^2 / (gx)$. On obtient l'équation de l'enveloppe

$y = \tfrac{1}{2}\, v^2 / g - \tfrac{1}{2}\, g\, x^2 / v^2$,

qui est encore une parabole ayant le feu (on peut bien le dire!) à l'origine, c'est à dire dans la position di canon. On appelle cette parabole "la parabole de sûreté" parce que un avion qui se trouve au dehors d'elle ne peut pas être frappé par le canon antiaérien avec aucune hausse.
Ce résultat a été obtenu (sans analyse!) par Evangelista Torricelli.



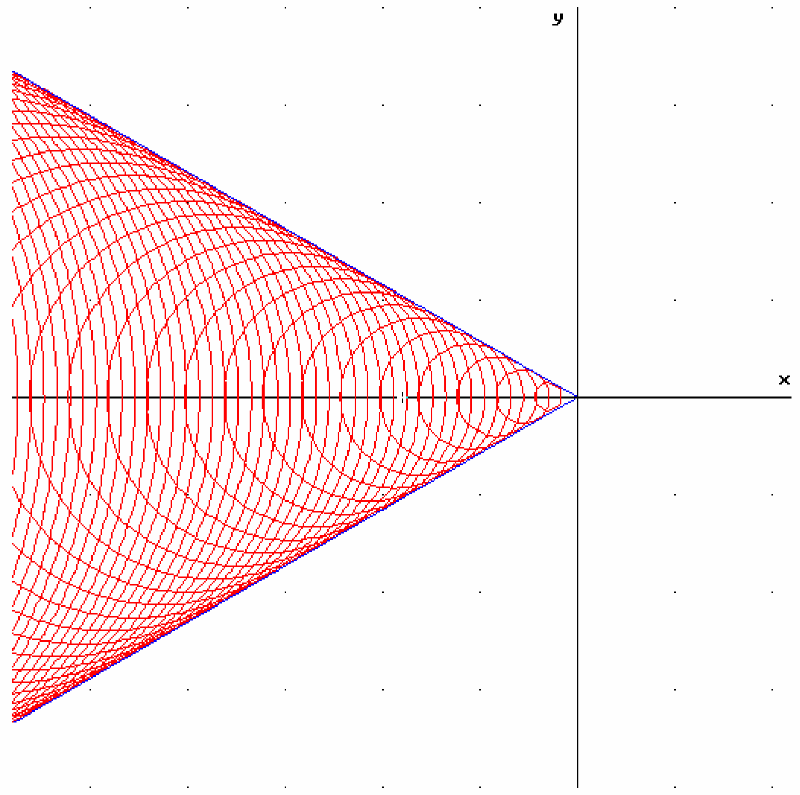
La réalisation n’est pas parfaite, mais on voit qu’il y a une enveloppe, quoique elle n’est pas une parabole exacte, parce que le “point” est un peu trop grand: on a employé seulement des tuyaux de jardinage avec des trous!

C’est pourquoi nous ne l’avons pas réalisée avec un jet d’eau.

(Exercice: calculer la pression qu’il y faut pour obtenir cette enveloppe, par rapport à celle des jets).

Sillage de gouttes

Si un goutte tombe dans une pièce d'eau, elle forme des cercles dont le rayon croît avec une célérité c. Une deuxième goutte qui tombe un peux plus tard près de la première forme d'autres cercles, qui seront un peu plus petits.[2] Une série de gouttes qui tombent d'un récipient percé se mouvant d'une vitesse constante v > c le long d'une coulisse engendrent une famille de cercles dont l'enveloppe est simplement un pair de demi-droites formant avec la trajectoire un angle α dont le sinus est $\sin \alpha = c/v$, comme on voît aisément avec de la géométrie élémentaire. Il y a des triangles semblables, dont l'hypoténuse est proportionnelle à v, et un côté à c.



Bien entendu, on peut faire de l'analyse aussi… la famille de circonférences est par exemple

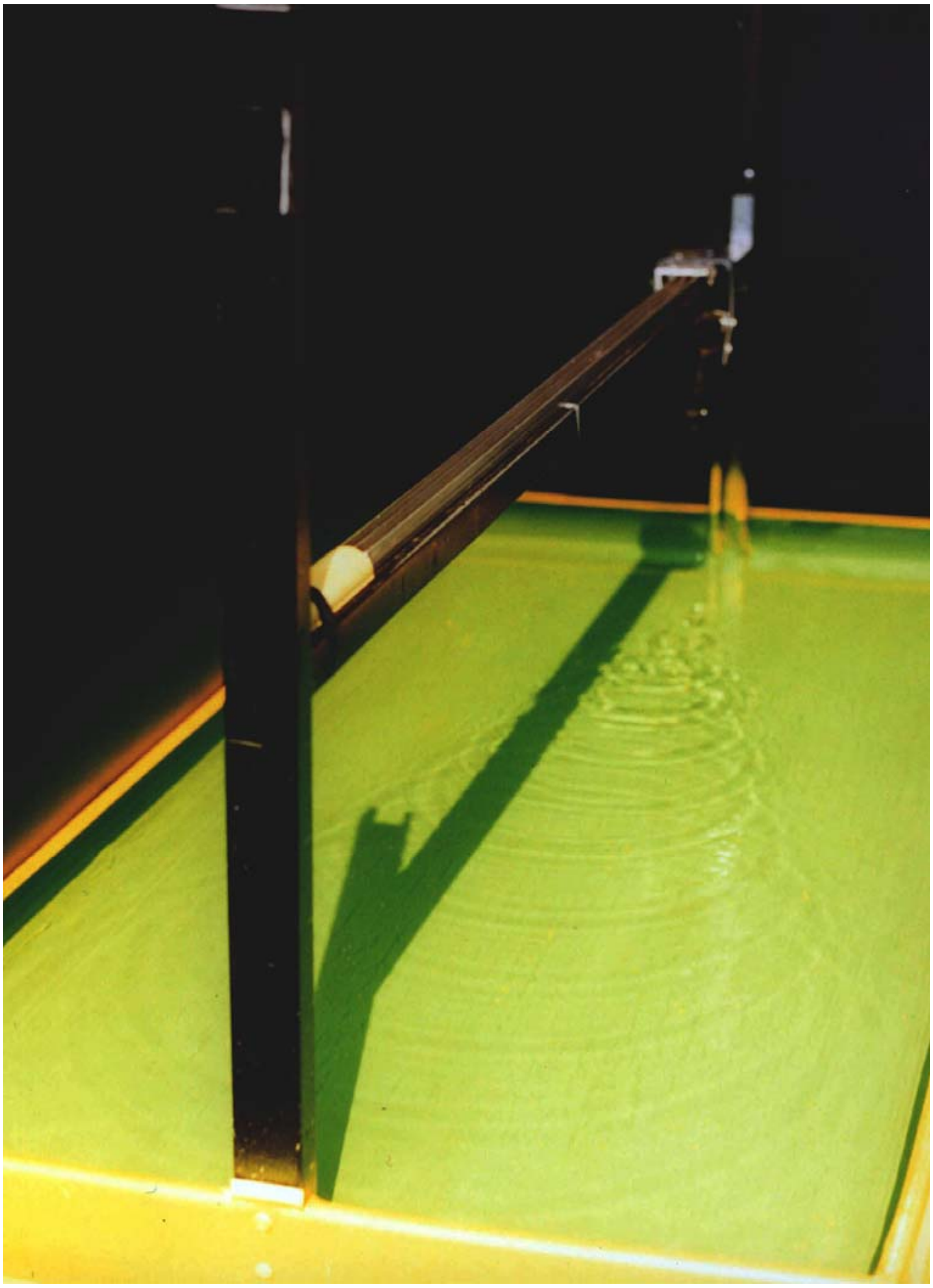
$(x-vt)^2 + y^2 = c^2 t^2$,

et l'élimination de t entre elle et sa dérivée $-2v(x- v t) = 2 c^2 t$ porte à

$y = \pm\ x / \sqrt{\beta^2 - 1}$, pourvu que $\beta = v/c$ soit > 1.

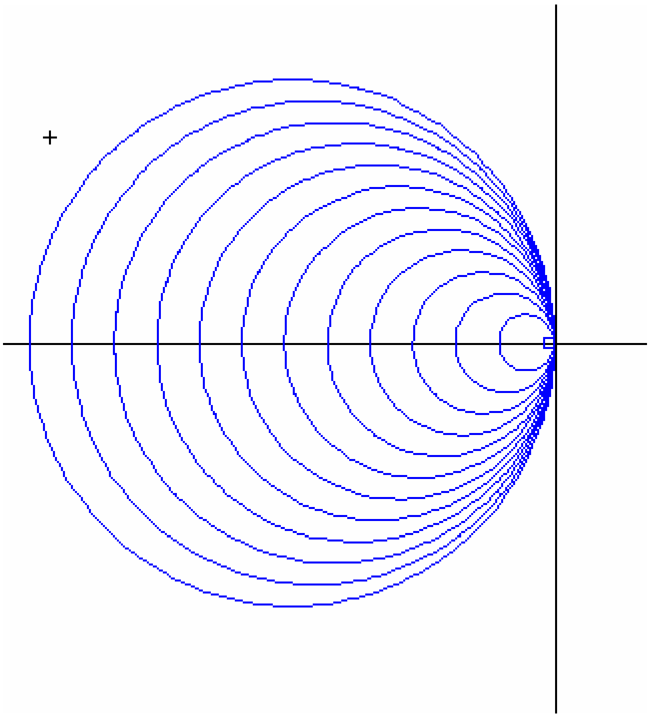
Et voilà l'appareil construit pour montrer ce phénomène.

[2] Leonardo da Vinci, *Ms.* I, *fol.* 87: «Se il sasso sarà gittato nell'acqua immobile, i sua circuli fieno equidistante al suo cientro. Me se il fiume si muoverà, essi circuli si formeranno di lunga quasi ovata figura, e si partirà insieme col cientro suo proprio sito dove fu creato seguitando il corso».



On pourrait envisager un mesure de la vitesse d'un bateau, en évaluant c à bateau ferme et α en observant l'angle de ouverture du sillage. C'est la tâche, ou mieux, le devoir pour demain, sur le lac…

Dans l'air, si un avion vole à une vitesse supersonique, l'enveloppe des perturbations sphériques produites par son mouvement est un cône: le cône de Mach. Si la vitesse est subsonique, les sphères ne se coupent pas, et sont tangentes entre elles à la vitesse du son, formant ce qu'on appelle le mur du son.



Lorsque on franchit ce mur, la superposition de toutes ces perturbations cause des fortes tensions dans la structure de l’avion, mais peut causer aussi la condensation de la vapeur dans l’air!