Giochi d’acqua

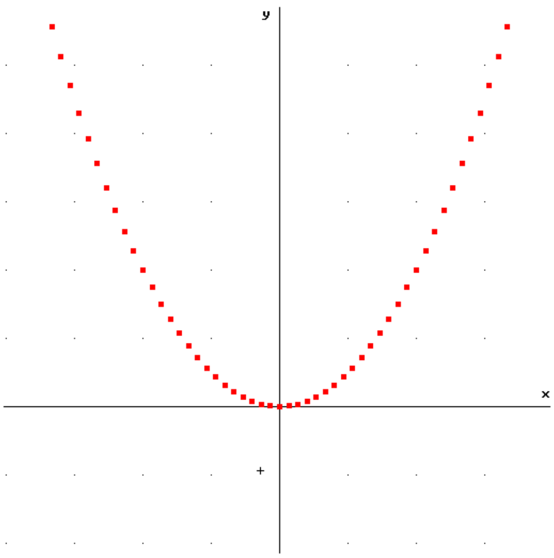
Claudio Citrini - Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano
10/5/2008
Matematica senza frontiere

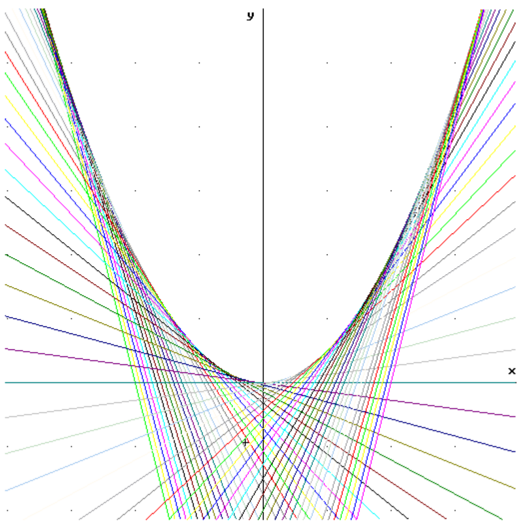
Da tempo seguo la stesura di tesi di Specializzazione in Didattica . Tra queste, una [1] è stata interessante per il modo un po’ insolito di fare matematica usando l’acqua.

Lo scopo di questa tesi è stato lo studio dell’inviluppo di una famiglia *F* di curve

Inviluppi

L’inviluppo di F è una nuova curva Γ che è tangente in ogni punto ad una curva di F. E’ ben noto che si può descrivere una curva Γ disegnando tutte le sue linee tangenti invece che disegnando i suoi punti. : la dualità è un capitolo molto elegante nella teoria delle coniche.
Da un punto di vista geometrico, questa descrizione dà in generale una visione più suggestiva, perchè l’occhio percepisce meno le discontinuità tramite le tangenti che tramite i punti.



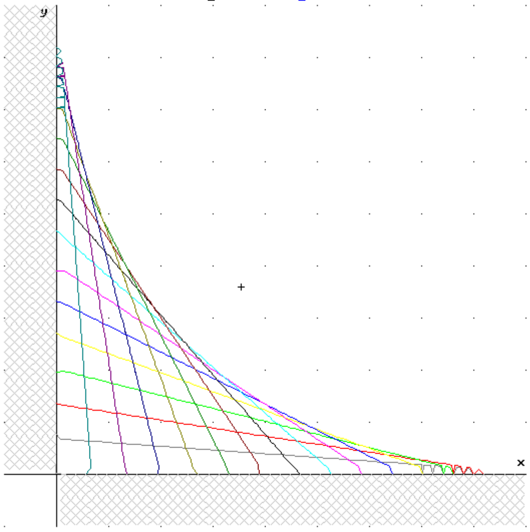


E’ facile costruire un inviluppo di rette anche senza l’uso di alcuna matita, semplicemente piegando della carta o usando ago e file
Per esempio se dividiamo in parti uguali due segmenti consecutivi qualunque AS e BS e li numeriamo A = 0, 1, …n = S = 0, 1, …n = B, si può disegnare l’arco AB della parabola tangente in A e B ai due segmenti, congiungendo i punti con lo stesso nome.

Nella figura i segmenti sono perpendicolari e uguali, la parabola è $(x - y)^2 + 1 = 2\cdot(x + y)$ e i punti A(0, 1) V(0, 0) et B(1, 0); le tangenti hanno equazioni $\frac{x}{t} + \frac{y}{1-t} = 1$.

[1] Giovanna Castelli, 1999.

Si veda ad esempio http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ParabolaMesh.shtml



Dal punto di vista analitico il problema degli inviluppi è trattato in genere all'interno dei corsi universitari.
Se la famiglia di curve , dipendente da un parametro t, è data dall'equazione implicita f(x, y ; t) = 0, si dimostra che l'inviluppo soddisfa il sistema

$$\begin{cases} f(x,y;t) & = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y;t)}{\partial t} & = 0 \end{cases}.$$

Ci sono naturalmente delle ipotesi, ma noi qui non vogliamo fare teoria, ma più semplicemente suggerire idee, che possano essere utilizzate all'interno di un laboratorio didattico a qualunque livello scolastico (più o meno)

Mostro ora tre esempi che sono ben noti, ma che sono simpatici perchè si possono realizzare con strumenti assai semplici. Ci sono due curve facili da ottenere con l'acqua : la parabola e la circonferenza.

Buchi in un recipiente

La traiettoria di un oggetto sottoposto alla forza di gravità è una parabola, ma noi non possiamo visualizzarla nell'aria ; al contrario un getto d'acqua descrive una parabola che resta ferma e perfettamente visibile

Ecco dunque un primo esempio : se nella parete di un recipiente (una bacinella o una vaschetta, non importa) in cui vi è dell'acqua ad un livello costante H, pratichiamo un buco ad altezza h >H, si ottiene un getto le cui equazioni sono
$x = vt$
$y = h - ½ gt^2$.

Potremmo usare un riferimento in cui H =0, ma non avrebbe alcun vantaggio nei calcoli.La velocità orizzontale alla quale parte il getto (calcolata tramite il teorema di conservazione dell'energia) è data dalla formula
$v = \sqrt{2g(H-h)}$.

Eliminando il tempo t si trova l'equazione della parabola descritta dal getto , che è

$$y = h - \frac{x^2}{4(H-h)}$$

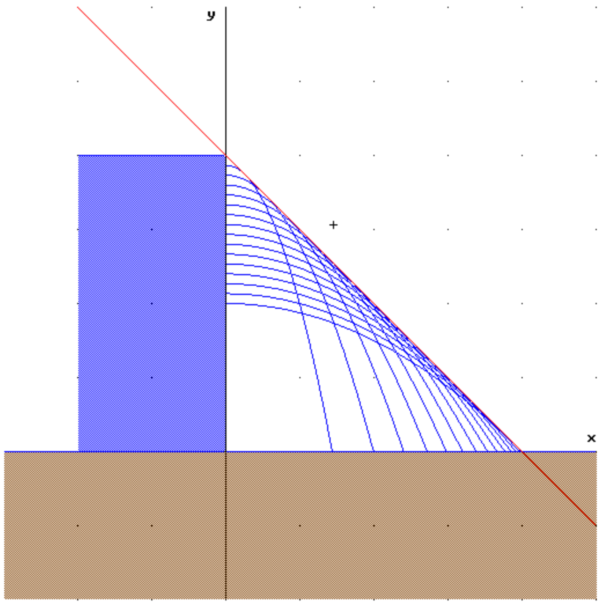
(si può notare che l'accelerazione di gravità g è scomparsa). Una derivata parziale ripetto al parametro h fornisce

$$0 = 1 - \frac{x^2}{4(H-h)^2}$$

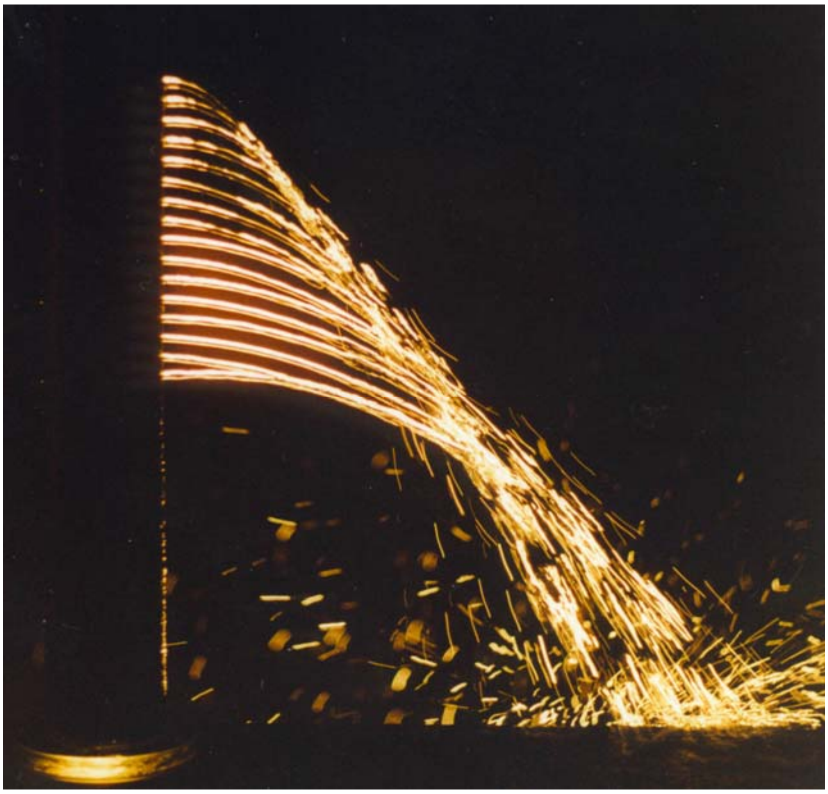
e l'eliminazione di h porta subito all'equazione dell'inviluppo, che è semplicemente

$$y = H - x,$$

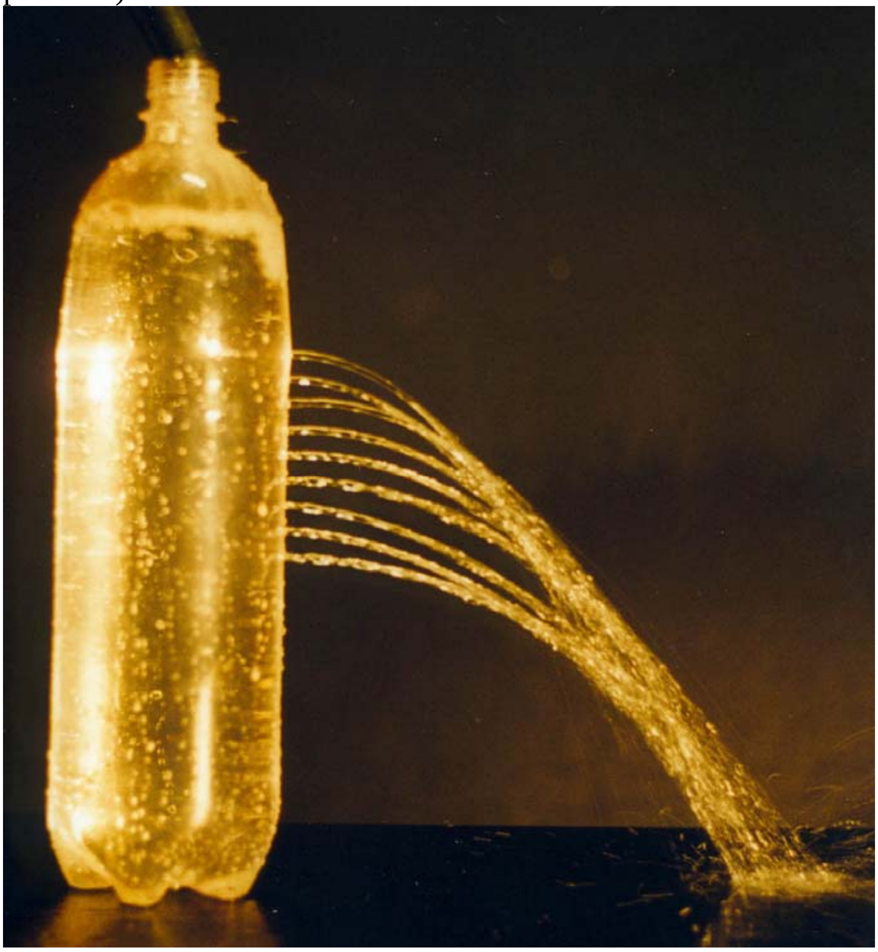
Vale a dire un linea retta che ha la direzione della bisettrice degli assi (sulla Terra o sulla luna, è lo stesso !)



La realizzazione di questo esperimento è semplice e fornisce uina figura come questa



O ancora più semplicemente come la seguente che può essere realizzata anche a casa (se mamma lo permette)



Artiglieria

Supponmiamo che un cannone,(all'origine degli assi) lanci i suoi proiettili ad una velocità data v, in una direzione (alzata) che forma un angolo α arbitrario sull'orizzontale. Le leggi del movimento del proiettile, sottocerte ipotesi fisiche che sono ben note, sono :

$x = v \cos \alpha \, t$

$y = v \sin \alpha \, t - \frac{1}{2} g t^2$.

La traiettoria è pertanto la parabola di equazione

$y = \mathrm{tg}\, \alpha \, x - \frac{1}{2} g (x / v \cos \alpha)^2$

o, ponendo $m = \mathrm{tg}\, \alpha$:

$y = m x - \frac{1}{2} (1 + m^2) g x^2 / v^2$

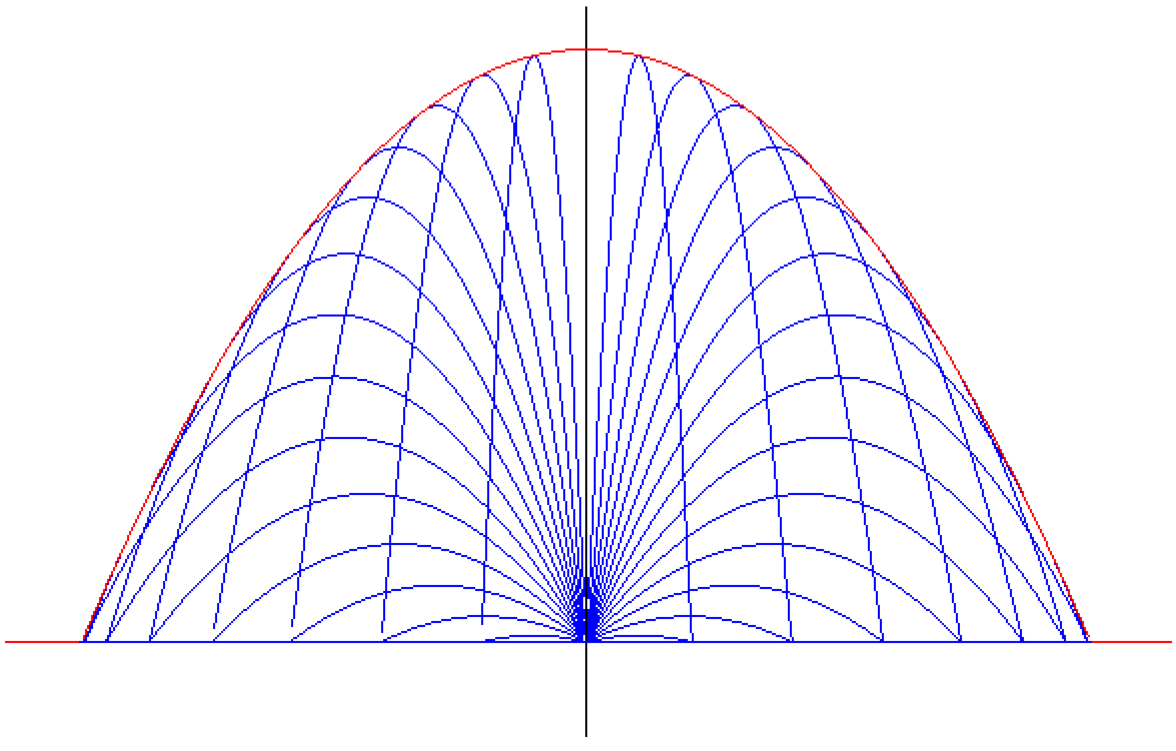
Se deriviamo rispetto a m otteniamo

$0 = x - m g x^2 / v^2$

ove $m = v^2 / (gx)$. Si ottiene l'equazione dell'inviluppo

$y = \frac{1}{2} v^2 / g - \frac{1}{2} g x^2 / v^2$,

Che è ancora una parabola avente il fuoco (sin può ben dirlo !) all'origine, cioè nella posizione del cannone. Questa parabola si chiama « Parabola di sicurezza » perchè un aereo che si trovi al di fuori di essa non può essere colpito dal cannone antiaereo con nessun alzata. Questo risultato è stato ottenuto (senza analisi !) da Evangelista Torricelli



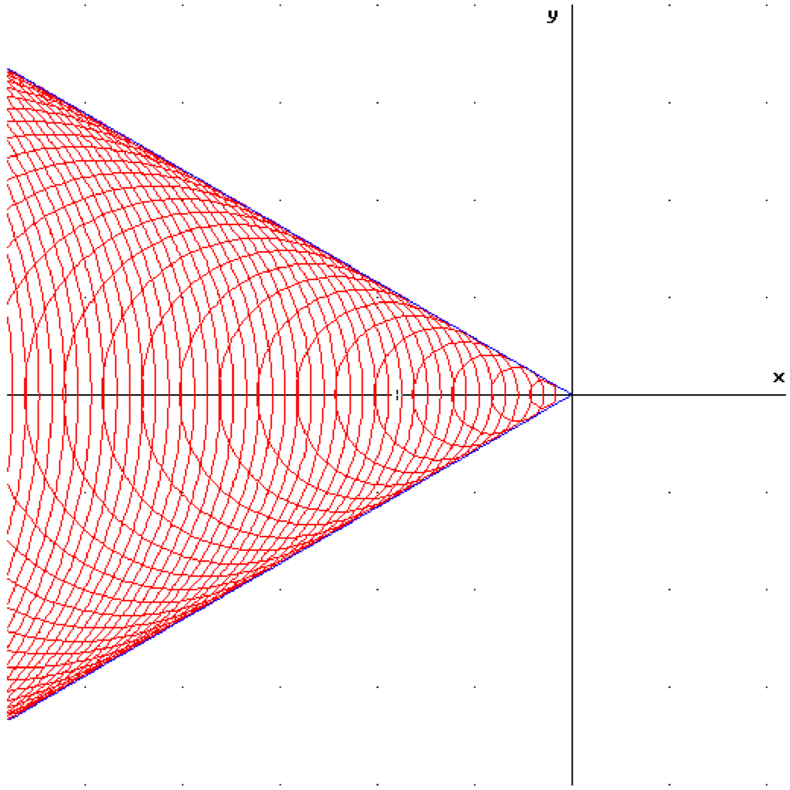
La realizzazione seguente non è perfetta, ma si vede che c'è un inviluppo, anche se non si identifica una parabola esatta in quanto il « punto » è un po' troppo grande. Si è impiegato qui solo del tubo da giardinaggio con dei buchi.

E’ perchè noi non l’abbiamo realizzato con un getto d’acqua.

(Esercizio: calcolare la pressione che occorre per ottenere questo inviluppo in confronto con quella dei getti)

Scia di gocce

Se una goccia cade nell'acqua, forma dei cerchi in cui il raggio cresce con una accelerazione c. Una seconda goccia, che cade un po' più tardi della prima, forma altri cerchi, che saranno un po' più piccoli. (2) Una serie di gocce che cadono da uno stesso recipiente bucato, si muovono di una velocità costante v > c lungo un binario e generano una famiglia di cerchi il cui inviluppo è semplicemente una coppia di semirette, che formano con la traiettoria un angolo α il cui seno è sin α = c/v, come si verifica agevolmente con la geometria elementare : ci sono triangoli simili la cui ipotenusa è proporzionale a v, e un lato a c.

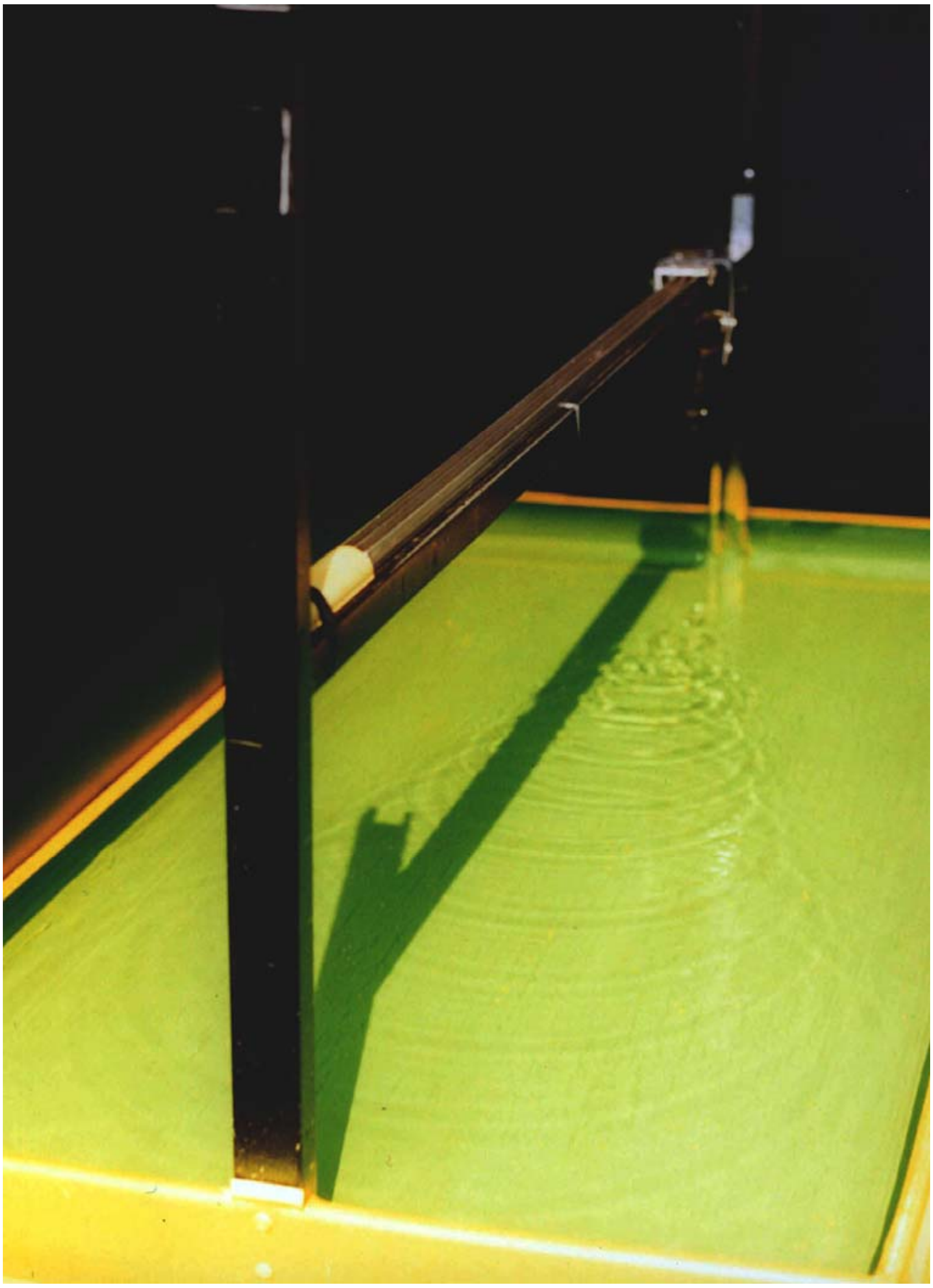


Ben inteso, si può fare anche dell'analisi…la famiglia di circonferenze è per esempio
$(x-vt)^2 + y^2 = c^2 t^2$,

E l'eliminazione di t tra lei e la sua derivata $-2v(x- v t) = 2 c^2 t$ porta a

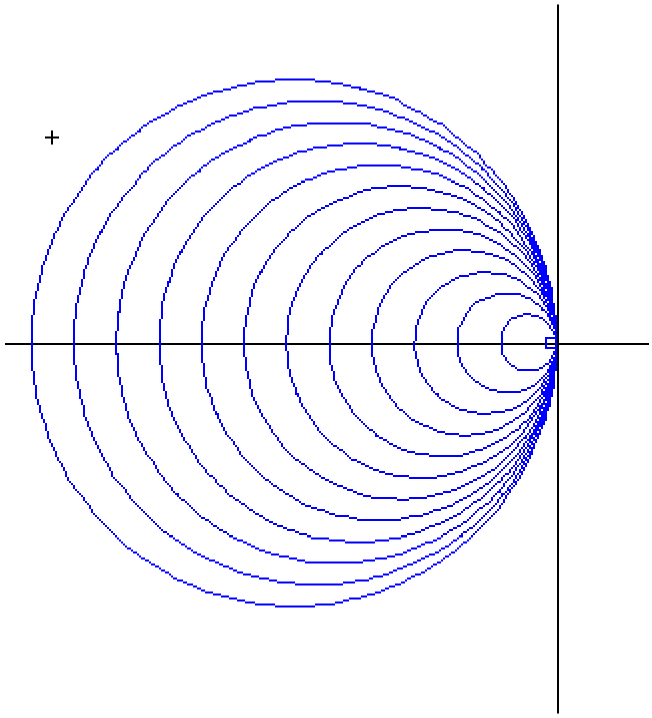
$y = \pm\ x / \sqrt{\beta^2 - 1}$, supopsto che β = v/c sia > 1.

Ed ecco lo strumento costruito per mostrare il fenomeno



Si potrebbe rendere visibile la misura della velocità di un battello, stimando c a battello fermo e α osservando l'angolo di apertura dela scia. E' il nostro obiettivo per domani sul lago...

Nell'aria se un aereo vola ad una velocità supersonica l'inviluppo delle perturbazioni sferiche prodotte dal suo movimento è un cono (di Mach) se la velocità e subsonica le sfere non si tagliano, e sono tangenti fra loro, alla velocità del suono, formando quello che si chiama il muro del suono



Quando si infrange questo muro, la sovrapposizione di tutte queste perturbazioni causa delle forti tensioni nella struttura dell' aereo, ma può causare anche la condensazione del vapore nell'aria!