

Elementi di soluzione della competizione del 13 marzo 2003

Esercizio 1 : Pausa caffè

La cosa più semplice è mettere tutte le monete in comune.

Si dispone quindi di: $1\text{€} + 50\text{ ct} + 3 \times 20\text{ ct} + 2 \times 10\text{ ct} + 2 \times 5\text{ ct}$

Si comincia con l'ottenere 2 caffè introducendo $2 \times (20\text{ ct} + 10\text{ ct} + 5\text{ ct})$.

Si ottiene il terzo caffè introducendo 50 ct.

La macchina rende 10 ct + 5 ct. Si danno 5 ct a Daniela e 10 ct a Bernardo.

Si ottiene il quarto caffè introducendo 1€; la macchina rende 0,65 € nel solo modo possibile: 50 ct + 10 ct + 5 ct. Si danno 5 ct a Claudia, ancora 10 ct a Bernardo e ad Alberto 50 ct più i 20 ct non utilizzati.

Allora ciascuno ha il suo caffè e il suo resto.

Esercizio 2 : Avanti un altro!

L'unica soluzione è $6+7+8+9+10 = 40$

Non si chiede di dimostrare perché è l'unica.

Esercizio 3 : Chi fa da séfa in tre

Denominando i punti come in figura :

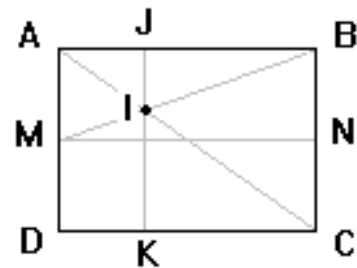
Nei triangoli AIM e CIB,

per il teorema di Talete : $AI/IC = AM/CB = 1/2$

Quindi $IC = 2 AI$ e $AC = 3AI$

Nei triangoli AIJ e ACB, per il teorema di Talete si ha :

$$AJ = 1/3 AB$$



nota : c'è anche una soluzione analitica

$DC=a, BC=b$

retta per AC $y = -(b/a)x + b$

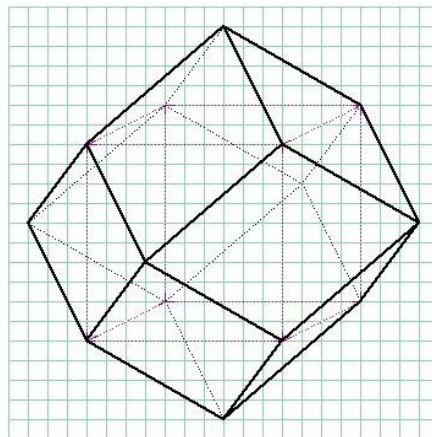
retta per MN $y = b/2$

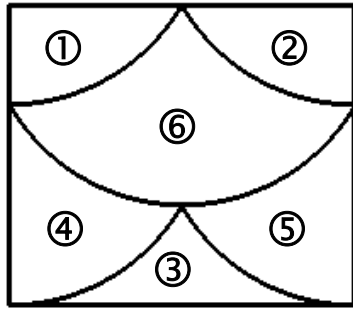
retta per MB $y = (b/2a)x + b/2$

intersecando AC con MB si ottiene:

$-(b/a)x + b = (b/2a)x + b/2$ da cui $x = a/3$.

Esercizio 4 : A rombi





Esercizio 5 : Non è π

Ecco il rettangolo:

La base è $6 \times \sqrt{3}$ cm

L'altezza è $1,5 \times 6 = 9$ cm

Da cui l'area è :

$54 \sqrt{3} \text{ cm}^2$

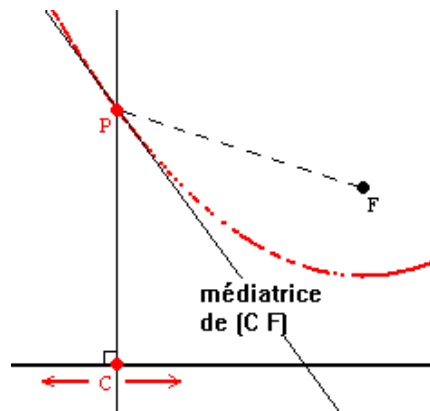
Esercizio 6 : Alla conquista dell'undici

La soluzione è **9876524130** .

Per calcolarla si nota in partenza che 9876543210 non è multiplo di 11, perché $9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 = 5$, poi si modifica il meno possibile, partendo dalla destra... e buon lavoro!

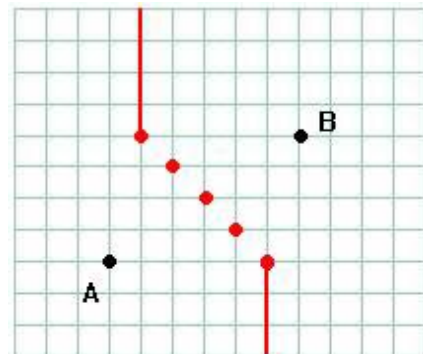
Esercizio7 : Alle corde

Da un lato $PF = 14 - DP$ perché la cordicella è tesa
 e dall'altro $PC = 14 - DP$ perché i punti D, P e C sono allineati
 Da cui $PF = PC$
 Questa uguaglianza può essere utilizzata per il grafico; P si trova sull'asse del segmento CF



Esercizio 8 : Geometria poliziesca

In questa geometria si ottiene uno strano asse costituito da due semirette e tre punti isolati



Esercizio 9 : Quadrante lunare

Il disco lunare è tangente alle 3 semicirconferenze. Sia R il

suo raggio. Allora, nel triangolo AOL :

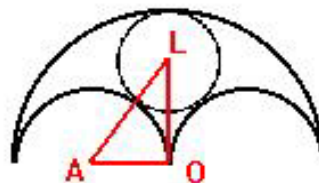
$$OA = \frac{1}{2}; \quad AL = \frac{1}{2} + R \quad \text{e} \quad OL = 1 - R.$$

Questo triangolo, essendo rettangolo, per ragioni di simmetria col teorema di Pitagora ci dà:

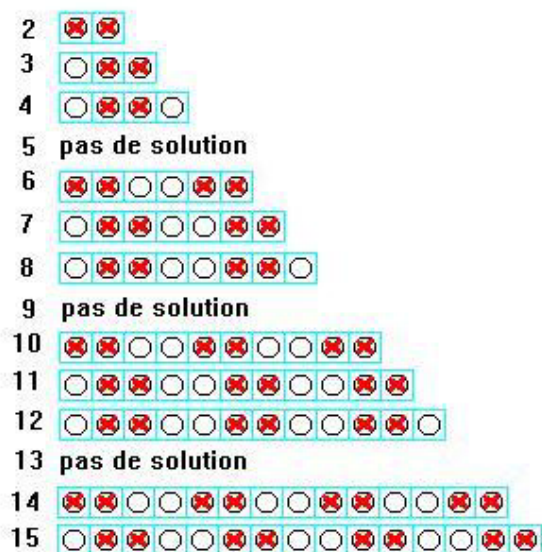
$$(\frac{1}{2} + R)^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1 - R)^2$$

da cui

$R = \frac{1}{3}$



Esercizio 10: Tasto nero - tasto bianco



Sembra che gli allineamenti che non hanno soluzione siano quelli con un numero di gettoni pari a $4n + 1$, ma è assai difficile dimostrarlo.

Al contrario è più facile stabilire che l'allineamento di 2 003 gettoni può essere rivoltato: si inizia da sinistra, si rivoltano i primi 2 000 gettoni a gruppi di 4 secondo la soluzione della linea 4, poi si girano gli ultimi 3 secondo la soluzione della linea 3.

Esercizio 11 : I viaggi ringiovaniscono

La formula $T_A = T_B \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ fornisce $20 = 40 \times \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ quindi $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$

cioè : $1 - v^2 / c^2 = \frac{1}{4}$ e $v^2 = 3/4 c^2$.

Pertanto : $v = c\sqrt{3} / 2$ cioè circa **260 000 km/s**.

Esercizio 12 : Partita di bocce

Se denominiamo a lo spigolo del cubo, la sua diagonale maggiore è $a\sqrt{3}$, che è anche uguale al diametro della boccia, quindi:

$$a = 74 / \sqrt{3} = 74 \sqrt{3} / 3$$

Il diametro della circonferenza uguaglia la diagonale delle facce del cubo, vale a dire:

$$\begin{aligned} d &= a \times \sqrt{2} \\ &= 74 \times \sqrt{6} / 3 \end{aligned}$$

Allora il raggio di queste circonferenze è in millimetri :

$$R = \frac{37\sqrt{6}}{3}$$

Esercizio 13 : Quadratura

Chiamiamo L_n la serie delle basi e l_n quelle delle altezze.

$$L_0 = 9 \quad , \quad l_0 = 3$$

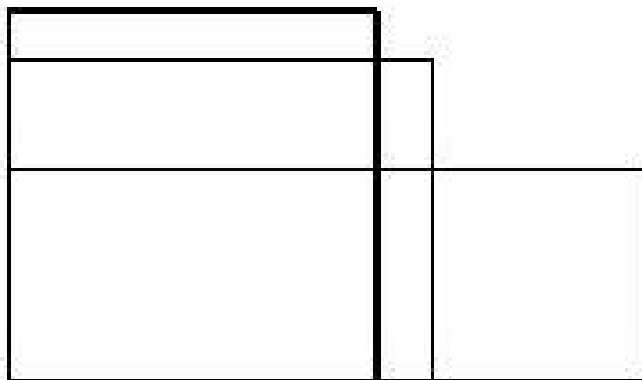
Quindi l'area del primo rettangolo è $9 \times 3 = 27$.

Allora

$$L_1 = \frac{9+3}{2} = 6 \quad \quad \quad l_1 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$L_2 = \frac{6 + \frac{9}{2}}{2} = \frac{21}{4} = 5,25 \quad \quad l_2 = \frac{27}{\frac{21}{4}} = \frac{36}{7} = 5,1428.....$$

$$L_3 = \frac{\frac{21}{4} + \frac{36}{7}}{2} = \frac{291}{56} = 5,1964..... \quad \quad l_3 = \frac{27}{\frac{291}{56}} = \frac{504}{97} = 5,1958...$$



Gli ultimi due rettangoli sono quasi uguali. Il rettangolo si avvicina rapidamente a un quadrato.

La base e l'altezza si avvicinano ad un valore comune che sarà il lato di questo quadrato, cioè $\sqrt{27}$.

La calcolatrice ci dà: $\sqrt{27} = 3\sqrt{3} = 5,1961....$